Jurnal Matematika Vol. 15, No.2, Desember 2025, pp. 116-124 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2025.v15.i02.p191

Unit, Elemen Tak Tereduksi dan Elemen Prima pada Bilangan Bulat $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Daisyah Alifian Fatahillah [1*], Abdul Gazir Syarifudin[2]

[1]*Prodi Matematika, Universitas Mataram, Indonesia*
[2]*Prodi Matematika, Universitas Kebangsaan Republik Indonesia, Indonesia*

Email: daisfatahillah2@gmail.com

*Corresponding Author

ABSTRACT

The ring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ is an example of an integral domain, and one of its notable characteristics is that it contains infinitely many units. This contrasts with the ring of integers $\mathbb{Z}$, which has only the units ± 1 and satisfies the property of a Unique Factorization Domain (UFD). However, integral domain $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ does not fully possess the properties of a UFD and is therefore classified as a Halfway Factorial Domain (HFD). This study utilizes the HFD structure of $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ to identify irreducible elements and prime elements within the ring.

Keywords: HFD; UFD; Integral domain; Ring; Unit; Prime; Irreducible.

ABSTRAK

Gelanggang $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ merupakan salah satu contoh *integral domain* dan salah satu karakteristik yang di miliki oleh $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ adalah mempunyai tak hingga unit didalamnya. Berbeda dengan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang mempunyai unit hanya ± 1 serta bersifat *Unique Factorization Domain* (UFD). Integral domain $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ tidak sepenuhnya memiliki sifat sifat UFD, karena hal tersebut $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ tergolong sebagai *Halfway Factorial Domain (HFD)*. Penelitian ini akan memanfaatkan sifat HFD tersebut untuk mengidentifikasi elemen tak tereduksi dan elemen prima pada $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Kata Kunci: HFD; UFD; Integral domain; Gelanggang; Unit; Prima; Tak tereduksi.

I. Pendahuluan

Elemen tak tereduksi dan elemen prima pada integral domain merupakan konsep dasar dalam teori bilangan dan aljabar abstrak. Elemen-elemen ini memainkan peran penting, terutama dalam ranah kriptografi modern Seperti kriptografi RSA. Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan P. Pollack [6] dia menjelaskan mengenai karakteristik elemen tak tereduksi dan elemen prima pada $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Hal tersebut tentunya memberikan pandangan baru kepada matematikawan lain dalam meneliti elemen tak tereduksi dan elemen prima pada integral domain lain.

Pada penelitian ini akan berfokus pada karakteristik dari integral domain $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, dimana $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ didefinisikan sebagai

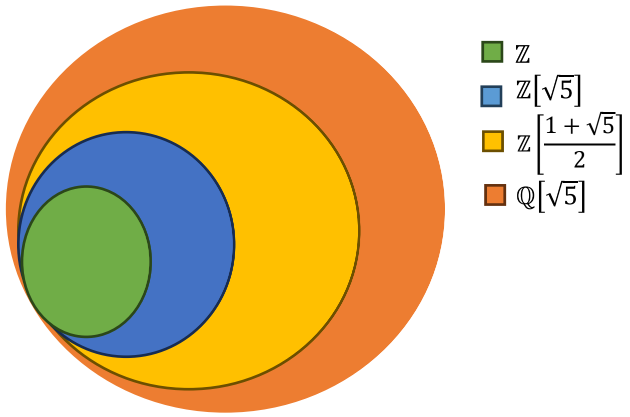
$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid \text{untuk setiap } a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Selanjutnya kami mencoba untuk melihat hubungan antara integral domain $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ dan $\mathbb{Z}$ menggunakan pemetaan N yang disebut sebagai norm yang didefinisikan sebagai berikut:

$$N : \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \to \mathbb{Z}$$

Untuk setiap $x = x_1 + x_2\sqrt{5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ terdapat $\bar{x} = x_1 - x_2\sqrt{5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Sedemikian berlaku $N(x) = x.\bar{x}$.

Berikut ini akan diberikan gambar yang memuat informasi mengenai integral domain $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$



¶

Gambar 1.

Dari gambar di atas kita mendapatkan informasi bahwa $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \subset \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \subset \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. Diketahui bahwa gelangang bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan gelanggang bilangan bulat quadratic $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ bersifat *Unique Factolrization Domain* (UFD) dan gelanggang quadratic $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ bersifat *Principal ideal Domain* (PID) berakibat $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ bersifat UFD. Akan tetapi, gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ bersifat *Halfway Factorial Domain* (HFD) [8]. Penelitian yang dilakukan oleh K.Y. Li [7] bahwa persamaan Pell dalam bentuk $a^2 - 5b^2 = 1$ memiliki tak hingga solusi berakibat elemen unit di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ tak hingga banyaknya. Penting untuk dicatat bahwa meskipun $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ bukan UFD akan tetapi $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ masih mempertahankan sebagain dari sifat UFD-nya, berikut akan diberikan contoh bahwa $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ masih mempertahankan Sebagian dari sifat UFD:

Akan dipilih $4 \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ dimana elemen 4 dapat difaktorkan menjadi

$$4 = 2.2 = (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$$

Dapat dilihat bahwa elemen 2 tidak dapat membagi salah satu dari elemen $(3 + \sqrt{5})$ atau $(3 - \sqrt{5})$ begitu juga sebaliknya, berakibat $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ bukan UFD. Akan tetapi banyaknya dari setiap faktorisasi dari elemen 4 ada sebanyak 2 sehingga $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ disebut sebagai HFD karena banyak dari setiap faktorisasinya sama. Dalam penelitian yang dilakukan oleh G. Moles [8, contoh 4.2.7], ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ merupakan *Halfway Factorial Domain* (HFD).

Tujuan utama dari penelitian ini adalah untuk menyelidiki bagaimana sifat fundamental dari bilangan bulat $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Seperti karakteristik dari unit, elemen tak tereduksi dan elemen prima pada $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Melalui eksplorasi ini, kita mendapatkan pemahaman yang lebih dalam tentang struktur aljabar dan fenomena aritmatika yang muncul dalam domain integral $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Jurnal Matematika Vol. 15, No.2, Desember 2025, pp. 116-124 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2025.v15.i02.p191

II. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah tinjauan literatur dari berbagai penelitian yang sebelumnya dilakukan oleh peneliti lain.

III. Hasil dan Pembahasan

3.1 Unit di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Bagian ini akan diberikan beberapa sifat yang dapat mengindentifikasi unit pada $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, akan tetapi sebelum menuju ke hasil penelitian diberikan beberap definisi pendukung yang akan diberikan sebagai berikut:

Definisi 3.1.1 *[2] Misalkan D integral domain dan $\alpha \in D$. Elemen α dikatakan sebagai unit jika terdapat $\beta \in D$ sedemikian berlaku $\alpha\beta = 1$.*

Selanjutnya akan diberikan definisi dari Norm yang dimana definisi tersebut akan sangat berguna dalam menemukan elemen unit di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Definisi 3.1.2 *Misalkan N pemetaan yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$N: \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \to \mathbb{Z}$$

Definisi 3.1.3 *Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, terdapat $\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ sedemikian berlaku $N(\alpha) = \alpha \,.\, \bar{\alpha}$, dimana jika $\alpha = a_1 + a_2\sqrt{5}$ maka $\bar{\alpha} = a_1 - a_2\sqrt{5}$.*

Selanjutnya akan diberikan beberapa hasil dalam penelitian ini, yang akan di tulis sebagai berikut:

Lemma 3.1.1 *Untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, maka berlaku $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$*

Bukti.

Ambil sebarang $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, Dimana $\alpha = a_1 + a_2\sqrt{5}$ dan $\beta = b_1 + b_2\sqrt{5}$, sedemikian berlaku

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (a_1 + a_2\sqrt{5})(b_1 + b_2\sqrt{5}) \\ \Leftrightarrow \quad &= (a_1b_1 + 5a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{5} \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} N(\alpha\beta) &= N\left((ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}\right) \\ &\Leftrightarrow = \left((a_1b_1 + 5a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{5}\right)\left((a_1b_1 + 5a_2b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{5}\right) \\ &\Leftrightarrow = (a_1b_1 + 5a_2b_2)^2 - 5(a_1b_2 + a_2b_1)^2 \\ &\Leftrightarrow = a_1^2b_1^2 + 10a_1a_2b_1b_2 + 25a_2^2b_2^2 - 5(a_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2) \\ &\Leftrightarrow = a_1^2b_1^2 + 10a_1a_2b_1b_2 + 25a_2^2b_2^2 - 5a_1^2b_2^2 - 10a_1a_2b_1b_2 - 5a_2^2b_1^2 \\ &\Leftrightarrow = a_1^2b_1^2 - 5a_1^2b_2^2 - 5a_2^2b_1^2 + 25a_2^2b_2^2 \\ &\Leftrightarrow = (a_1^2 - 5a_2^2)(b_1^2 - 5b_2^2) \\ &\Leftrightarrow = N(\alpha)N(\beta) \end{aligned}$$

■

Lemma 3.1.2 *Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, maka berlaku $N(\alpha^n) = N(\alpha)^n$.*

Bukti.

Mudah dibuktikan dengan menggunakan Lemma 3.1.1 ■

Lemma 3.1.3 *Elemen $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ dikatakan unit jika dan hanya jika $N(\alpha)^2 = 1$.*

Bukti.

($\Rightarrow$) Diketahui α unit sedemikian terapat β sehingga berlaku $\alpha\beta = 1$. Menggunakan Lemma 3.1.1 maka berlaku

$$N(\alpha\beta)^2 = N(\alpha)^2 N(\beta)^2 = 1$$

Karena $N(\alpha), N(\beta) \in \mathbb{Z}$ maka perkalian yang menghasilkan 1 adalah 1 atau -1 berakibat $N(\alpha)^2 = 1$ dan $N(\beta)^2 = 1$

($\Leftarrow$) Diketahui $N(\alpha)^2 = 1$ maka berlaku

$$N(\alpha)^2 = (\alpha\bar{\alpha})^2 = 1^2 = 1$$

berakibat α unit ■

Lemma 3.1.4 *Misalkan $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, jika $N(\alpha) = -1$ maka α^{2n}Adalah unit di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ untuk $n \in \mathbb{N}$.*

Bukti.

Akan dibuktikan α^{2n} unit, menggunakan Lemma 3.3.2 didapatkan

$N(\alpha^{2n}) = N(\alpha)^{2n} = (-1)^{2n} = (-1^2)^n = 1^n = 1$ ■

Berikut akan diberikan beberapa contoh untuk memudahkan pembaca dalam memahami sifat-sifat yang diberikan sebelumnya.

Contoh 1. Salah satu contoh unit di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ selain 1 dan -1 adalah $9 + 4\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} & N(x) = \left(9 + 4\sqrt{5}\right) \cdot \left(9 - 4\sqrt{5}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & = 81 - 5.16 \\ \Leftrightarrow \quad & = 81 - 80 \\ \Leftrightarrow \quad & = 1 \end{aligned}$$

Sehingga $\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n$ akan selalu menjadi unit di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Contoh 2. Salah satu contoh lain dari unit di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ adalah $2 + \sqrt{5}$

$$\begin{aligned} & N(x) = \left(2 + \sqrt{5}\right) \cdot \left(2 - \sqrt{5}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & = 4 - 5 \\ \Leftrightarrow \quad & = -1 \end{aligned}$$

Sehingga $\left(2 + \sqrt{5}\right)^{2n}$ akan selalu menjadi unit di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

3.2 Elemen Tak Tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Diketahui bahwa $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ bukan merupakan UFD sehingga elemen tak tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ belum tentu merupakan elemen prima di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Sehingga pada bagian ini akan diberikan beberapa definisi dan sifat yang membantu dalam mengidentifikasi elemen tak tereduksi pada $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Definisi 3.2.1 *[2]. Misalkan $\alpha, \beta \in D$, elemen α dikatakan dapat membagi β yang dinotasikan sebagai $\alpha|\beta$, jika terdapat $\gamma \in D$. Sedemikian $\beta = \alpha\gamma$.*

Definisi 3.2.2 *[3]. Misalkan D integral domain dan $\alpha \in D$ untuk α elemen tak nol dan tak unit di D. Elemen α dikatakan dapat* ***tereduksi*** *jika dapat ditulis sebagai $\alpha = \beta\gamma$, untuk $\beta, \gamma \in D$*

Jurnal Matematika Vol. 15, No.2, Desember 2025, pp. 116-124 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2025.v15.i02.p191

dan keduanya bukan unit. Lebih Jauh, elemen α dikatakan ***tak tereduksi*** *jika dapat ditulis sebagai $\alpha = \beta\gamma$, untuk $\beta, \gamma \in D$ dan salah satu dari β atau γ adalah unit.*

Definisi 3.2.3 *[8]. Misalkant D Integral domain and $a, b \in D$. Elemen a dan b dikatakan* ***associate*** *jika $a|b$ dan $b|a$ atau dapat ditulis sebagai $a = bu$ untuk $u \in U(D)$.*

Definisi 3.2.4 *[8]. Misalkan R suatu gelanggang dan diberikan tiga kondisi dari R sebagai berikut:*

I. *Jika setiap $\alpha \in R$ untuk α bukan elemen tak nol dan tak unitdi R. Sedemikian α dapat ditulis sebagai hasil perkalian elemen-elemen tak tereduksi di R atau ditulis sebagai $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ untuk α_i elemen tak tereduksi di R dan $1 \leq i \leq n$.*

II. *Jika α_i, β_j elemen tak tereduksi di R untuk $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ dan $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = \beta_1\beta_2 \dots \beta_m$ sehingga berlaku $n = m$.*

III. *Jika α_i, β_j elemen tak tereduksi di R untuk $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ dan $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = \beta_1\beta_2 \dots \beta_m$. berakibat untuk setiap $\alpha_i \in R$ saling associate dengan β_j untuk suatu $1 \leq j \leq m$.*

Maka gelanggang R dikatakan ***Atomic*** *jika memenuhi kondisi I, sedangkan Gelanggang R dikatakan* ***HFD*** *(Halfway Factorial Domain) jika memenuhi kondisi I dan II. Sementara itu, gelanggang R dikatakan* ***UFD*** *(Unique Factorization Domain) jika memenuhi kondisi I, II dan III.*

Selanjutnya akan diberikan beberapa hasil dari penelitian ini, diantaranya:

Preposisi 3.2.1. *Misalkan $c \in \mathbb{Z}$, elemen c dikatakan dapat membagi $\alpha = a + b\sqrt{5}$ jika dan hanya jika $c|a$ dan $c|b$.*

Bukti.

($\Rightarrow$) Andaikan $c|\alpha$ maka terdapat $k \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, sedemikian $\alpha = kc$, untuk $k = x + y\sqrt{5}$.

Sehingga dapat ditulis suatu persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \alpha = ck \\ \Leftrightarrow \quad & a + b\sqrt{5} = c(x + y\sqrt{5}) \\ \Leftrightarrow \quad & a + b\sqrt{5} = cx + cy\sqrt{5} \end{aligned}$$

Akibatnya $a = cx$ dan $b = cy$, berakibat $c|a$ dan $c|b$.

($\Leftarrow$) Andaikan $c|a$ dan $c|b$ maka terdapat $x, y \in \mathbb{Z}$, sedemikian berlaku $a = cx$ dan $b = cy$.

Sehingga dapat ditulis suatu persamaan sebagai berikut:

$$\alpha = a + b\sqrt{5} = cx + cy\sqrt{5} = c\left(a + b\sqrt{5}\right) = cd$$

dimana $d = a + b\sqrt{5}$, akibatnya $c|\alpha$

■.

Lemma 3.2.1. *Jika $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ dan $\alpha|\beta$ maka $N(\alpha)|N(\beta)$.*

Bukti.

Andaikan $\alpha|\beta$ maka terdapat $k \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Sedemikian, $\beta = k\alpha$, akibatnya didapatkan

$$N(\beta) = N(k\alpha) = N(k)N(\alpha)$$

sehingga terbukti bahwa $N(\alpha)|N(\beta)$

■

Lemma 3.2.2. *Jika α elemen tak tereduksi (atau prima) di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ maka $\bar{\alpha}$ elemen tak tereduksi (atau prima) di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.*

Bukti.

Andaikan $\bar{\alpha}$ tereduksi maka terdapat $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ dimana β, γ bukan unit dan tak nol, sehingga $\bar{\alpha} = \beta\gamma$. Sedemikian, dapat ditulis suatu persamaan sebagai berikut:

$$\alpha = \bar{\bar{\alpha}} = \overline{\beta\gamma} = \bar{\beta}\bar{\gamma}$$

Kontradiksi dengan argumen α tak tereduksi.

■

Teorema 3.2.1. *Misalkan $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Maka α merupakan elemen tak tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ jika dan hanya jika $N(\alpha) = p_1p_2$, untuk p_1 dan p_2 merupakan elemen tak tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ dan* $p_1, p_2 > 0$.

Bukti.

($\Leftarrow$) Andaikan α elemen tereduksi, maka terdapat $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ sedemikian berlaku $\alpha = \beta\gamma$,

dimana β dan γ elemen tak nol dan tak unit. Sehingga dapat ditulis dalam suatu persamaan sebagai berikut:

$$N(\alpha) = N(\beta.\gamma)$$
$$\Leftrightarrow \quad p_1p_2 = N(\beta).N(\gamma)$$

Kasus 1: jika $N(\beta) = p_1$ dan $N(\gamma) = p_2$

Karena $N(\beta) = p_1$ dan $N(\gamma) = p_2$ berakibat $\beta\bar{\beta} = p_1$ dan $\gamma\bar{\gamma} = p_2$. Kontradiksi dengan argument bahwa p_1, p_2 elemen tak tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Kasus 2: jika $N(\beta) = p_1p_2$ dan $N(\gamma) = 1$

Karena $N(\beta) = p_1p_2$ dan $N(\gamma) = 1$, berakibat γ unit di di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, kontradiksi dengan argument bahwa γ bukan unit.

($\Rightarrow$) Andaikan p_1 dan p_2 elemen tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, tanpa mengurangi perumuman maka terdapat $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Sedemikian berlaku $p_1 = q_1r_1$ dan $p_2 = q_2r_2$. Sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$N(\alpha) = p_1p_2$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha\bar{\alpha} = q_1r_1q_2r_2 \tag{1}$$

Diketahui bahwa α dan $\bar{\alpha}$ elemen tak tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Sedemikian pada persamaan (1) didapatkan banyak faktorisasi sebelah kiri adalah 2 dan banyak faktorisasi sebelah kanan Adalah 4, berakibat kontradiksi dengan argument bahwa $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ bersifat HFD.

■

Teorema 3.2.2. *Misalkan $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Maka α merupakan elemen tak tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ jika dan hanya jika $N(\alpha) = p^2$ untuk p merupakan elemen tak tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.*

Bukti.

Mudah dibuktikan menggunakan langkah yang sama pada pembuktian Teorema 3.2.1

■

3.3 Elemen Prima di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Jurnal Matematika Vol. 15, No.2, Desember 2025, pp. 116-124 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2025.v15.i02.p191

Pada bagian ini kami ingin memberikan karakteristik dari elemen prima pada integral domain $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, dimana menggunakan alur pembuktian yang sama yang dilakukan oleh P Pollack pada integral domain $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ [9]. Berikut diberikan beberapa definisi elemen prima dan beberapa sifat dari ideal pada gelanggang R.

Definisi 3.3.1.[3]. *Misalkan D integral domain dan $\alpha \in D$ untuk α elemen tak nol dan tak unit di D maka elemen α dikatakan* ***prima*** *jika $\alpha|\beta\gamma$ sedemikian berlaku $\alpha|\beta$ atau $\alpha|\gamma$.*

Definisi 3.3.2.[1]. *Suatu subhimpunan I pada gelanggang komutatif R dikatakan* ***ideal*** *di R jika memenuhi kondisi:*

1. *Untuk setiap $\alpha, \beta \in I$ berlaku $\alpha + \beta \in I$,*
2. *Untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku $ar \in I$*

Definisi 3.3.3.[1]. *Suatu ideal I di gelanggang komutatif R dikatakan* ***ideal prima*** *jika $I \neq R$,sedemikian untuk $a, b \in R$ berlaku $ab \in I$ berakibat $a \in I$ atau $b \in I$.*

Preposisi 3.3.1.[1]. *Setiap ideal maksimal di gelanggang komutatif R merupakan ideal prima.*

Preposisi 3.3.2.[8]. *Suatu ideal utama $\langle\alpha\rangle$ dikatakan ideal prima jika dan hanya jika α elemen prima di R.*

Selanjutnya akan diberikan beberapa hasil dari penelitian ini diantaranya:

Teorema 3.3.1. *Misalkan $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. maka $N\ (\alpha) = p$, untuk $p \in \mathbb{Z}$ dan p bilangan tak tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ jika dan hanya jika α merupakan elemen prima di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.*

Bukti.

($\Rightarrow$) Misalkan $N(\alpha) = p$ maka $\alpha\bar{\alpha} = p$, berakibat $\alpha|\, p$ atau $\bar{\alpha}|p$. Tanpa mengurangi perumuman misalkan $\alpha|\, p$ maka $\langle p\rangle \subseteq \langle\alpha\rangle$. dapat didefinsikan suatu pemetaan Φ yang bersifat epimorfisma gelanggang yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\Phi: \mathbb{Z}[\sqrt{5}]/\langle p\rangle \to \mathbb{Z}[\sqrt{5}]/\langle\alpha\rangle$$

Karena $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ didefinisikan sebagai $a + b\sqrt{5}$ berakibat $|\mathbb{Z}[\sqrt{5}]/\langle p\rangle| = p^2$. Diketahui bahwa $\langle p\rangle \subseteq \langle\alpha\rangle$ sehingga $|\mathbb{Z}[\sqrt{5}]/\langle\alpha\rangle| = p$, berakibat $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]/\langle\alpha\rangle \cong \mathbb{F}_p$ sedemikian sehingga $\langle\alpha\rangle$ ideal maksimal. Menurut Preposisi 3.3.1 membuat $\langle\alpha\rangle$ merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Menggunakan Preposisi 3.3.2 berakibat α prima.

($\Leftarrow$) Misalkan $N(\alpha) = p$, untuk p bukan prima di $\mathbb{Z}$ maka p dapat ditulis sebagai $p = \pi_1\pi_2 \dots \pi_n$, sehingga didapatkan suatu persamaan

$$N(\alpha) = p$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha\bar{\alpha} = \pi_1\pi_2 \dots \pi_n \tag{2}$$

Diketahui bahwa α prima di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ akibatnya α tidak dapat direduksi, sehingga dapat dilihat pada persamaan (2) bahwa banyaknya faktorisasi pada ruas sebelah kiri adalah 2 dan banyaknya faktorisasi sebelah kanan adalah n, kontradiksi dengan argument bahwa $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ HFD yang dimana banyaknya setiap faktorisasi elemennya sama.

∎

Lemma 3.3.1. *Misalkan* $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ *untuk* α *elemen tak nol. Jika* $\alpha = x + y\sqrt{5}$, *dimana* x, y *relatif prima dan* $\sqrt{5} \nmid x$ *maka* $gcd(\alpha, \bar{\alpha}) = 1$.

Bukti.

Andaikan $\gcd(\alpha, \bar{\alpha}) \neq 1$ maka terdapat $\gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, untuk γ bukan unit. Sedemikian $\gcd(\alpha, \bar{\alpha}) = \gamma$. sehingga $\gamma|\alpha$ dan $\gamma|\bar{\alpha}$. Andaikan $\gamma|\alpha$, dimana $\alpha = x + y\sqrt{5}$ maka $\gamma|x + y\sqrt{5}$, berakibat $\gamma|x$ dan $\gamma|y$ sehingga $\gcd(x, y) = \gamma$ kontradiksi dengan argumen bahwa $\gcd(x, y) = 1$.

■

Selanjutnya akan diberikan tabel yang memuat elemen unit, elemen tak tereduksi dan elemen prima di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Tabel 1. Unit di $\mathbb{Z}[\sqrt{\mathbf{5}}]$

$9 \pm 4\sqrt{5}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^7$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{13}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{19}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{25}$	...
$(9 \pm 4\sqrt{5})^2$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^8$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{14}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{20}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{26}$	...
$(9 \pm 4\sqrt{5})^3$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^9$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{15}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{21}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{27}$	...
$(9 \pm 4\sqrt{5})^4$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{10}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{16}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{22}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{28}$	...
$(9 \pm 4\sqrt{5})^5$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{11}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{17}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{23}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{29}$	...
$(9 \pm 4\sqrt{5})^6$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{12}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{18}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{24}$	$(9 \pm 4\sqrt{5})^{30}$	...

Tabel 2. Elemen prima di $\mathbb{Z}[\sqrt{\mathbf{5}}]$

$\pm\sqrt{5}$	$1 \pm 2\sqrt{5}$	$2 \pm 3\sqrt{5}$	$1 \pm 4\sqrt{5}$	$4 + 5\sqrt{5}$	$1 + 6\sqrt{5}$	...
$4 \pm \sqrt{5}$	$3 \pm 2\sqrt{5}$	$4 \pm 3\sqrt{5}$	$3 \pm 4\sqrt{5}$	$6 + 5\sqrt{5}$	$7 + 6\sqrt{5}$	...
$6 \pm \sqrt{5}$	$7 \pm 2\sqrt{5}$	$8 \pm 3\sqrt{5}$	$7 \pm 4\sqrt{5}$	$8 + 5\sqrt{5}$	$11 + 6\sqrt{5}$	...
$8 \pm \sqrt{5}$	$9 \pm 2\sqrt{5}$	$14 \pm 3\sqrt{5}$	$11 \pm 4\sqrt{5}$	$12 + 5\sqrt{5}$	$13 + 6\sqrt{5}$	...
$12 \pm \sqrt{5}$	$11 \pm 2\sqrt{5}$	$22 \pm 3\sqrt{5}$	$13 \pm 4\sqrt{5}$	$14 + 5\sqrt{5}$	$17 + 6\sqrt{5}$	...
...	...	...	...	...	...	...

Tabel 3. Elemen tak tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{\mathbf{5}}]$

2	23	67	$3 + \sqrt{5}$	$47 + 21\sqrt{5}$	...
3	37	73	$3 - \sqrt{5}$	$47 - 21\sqrt{5}$	...
7	43	83	$7 + 3\sqrt{5}$	$123 + 55\sqrt{5}$	...
13	47	97	$7 - 3\sqrt{5}$	$123 - 55\sqrt{5}$	...
17	53	...	...	...	...

IV. Kesimpulan

Adapun kesimpulan dari penelitian ini diantaranya:

1. Misalkan $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, maka α dikatakan unit jika dan hanya jika $N(\alpha) = 1$.
2. Jika $N(\alpha) = -1$ maka α^{2n} merupakan unit di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, untuk setiap n bilangan asli.
3. Elemen $c \in \mathbb{Z}$ dapat membagi elemen $\alpha = a + b\sqrt{5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ jika dan hanya jika $c|a$ dan $c|b$.
4. Elemen α di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ dikatakan prima jika $N(\alpha) = p$, untuk p elemen prima di $\mathbb{Z}$.
5. Elemen α di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ dikatakan tak tereduksi jika dan hanya jika $N(\alpha) = p_1 p_2$ untuk p_1, p_2 merupakan elemen tak tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ dan $p_1, p_2 > 0$.

6. Elemen α di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ dikatakan tak tereduksi jika dan hanya jika $N(\alpha) = p^2$ untuk p merupakan elemen tak tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
7. Misalkan $\alpha = x + y\sqrt{5}$. Jika x dan y relatif prima dan $\sqrt{5} \nmid x$, maka $\gcd(\alpha, \bar{\alpha}) = 1$.

Daftar Pustaka

[1] J. J. Rotman, *A First Course in Abstract Algebra with Applications* (Edisi ke-3). Pearson, 2005. ISBN 0131862677.

[2] A. Arifin, *Aljabar Linier* (Edisi ke-2). ITB Press, 2001. ISBN 978-602-5417-47-4.

[3] C. Bruck, "A Concrete Example of Prime Behavior in Quadratic Fields," Union College, 2017. doi: https://share.google/pYusQOfj9tB0UCdFB

[4] F. Maulana, I. G. A. W. Wardhana, dan N. W. Switrayni, "Ekivalensi Ideal Hampir Prima dan Ideal Prima pada Bilangan Bulat Gauss," *EIGEN MATHEMATICS JUOURNAL*, vol. 1(1):1–1, 2019. doi: https://doi.org/10.29303/emj.v1i1.29.

[5] E. S. Ningsih, Yanita, dan N. N. Bakar, "Bilangan Bulat Gaussian Z[i]," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 9(2): 146–153, 2020. doi: https://doi.org/10.25077/jmu.9.2.146-153.2020.

[6] S. T. Chapman, F. Gotti, dan M. Gotti, "How Do Elements Really Factor in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$?", *arXiv preprint*, 2019. doi: 10.48550/arXiv.1711.10842.

[7] K. Y. Li, "Pell's Equation I," *Proceedings of the 42nd International Mathematical Olympiad*, Washington DC, USA, vol. 6(3):8–9, 2001.

[8] G. Moles, *The HFD Property in Orders of a Number Field* (Tesis, Clemson University). Clemson University, 2022. doi: https://tigerprints.clem son.edu/all_theses/3851.

[9] P. Pollack, "$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$: Halfway to Unique Factorization," *Mathematical Association of America*, vol. 131(1), 2024.

[10] P. Pollack, "Half-Factorial real quadratic orders," *Archiv der Mathematik*, vol. 122(5) :1-10, 2024.