Jurnal Matematika Vol. 16, No.1, Juni 2026, pp. 14-22 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2026.v16.i01.p195

Perumuman Teorema Titik Tetap Pada Ruang Metrik Parsial

Ahmad Hadra Zuhri[1], Nissa Fiska[2*], Rahma Zuhra[3], Dara Irsalina[4], Muhammad Rizqi Musa[5]

[1,2,3,4,5]*Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Syiah Kuala*

*Corresponding Author. Email: nissa.fiska@usk.ac.id

ABSTRACT

Fixed point theory serves as a crucial framework in the study of nonlinear analysis, particularly in guaranteeing the existence and uniqueness of solutions to various mathematical problems, including differential equations, optimization, and equilibrium models. This study aimed to extend and refine the results obtained by Gangopadhyay et al. concerning the uniqueness of fixed points in partial metric spaces. By applying the Cantor Intersection Theorem like approach, this study focuses on systematically verifying the existence of fixed points for mappings under generalized contraction assumptions, thereby expanding the scope of classical fixed point theorems. Specifically, we analyzed Banach-type, Kannan-type, and Chatterjea-type contractions within the framework of partial metric spaces. Our main results demonstrated that mappings satisfying the contractive conditions formulated in Theorem 3.1 have a unique fixed point. This extension broadened the applicability to a wider class of mappings in partial metric spaces, including transcendent mapping, self-adjust contractions, and multivalued operators.

Keywords: Cantor Intersection Theorem; Contractive Conditions; Fixed Point; Partial Metric Space.

ABSTRAK

Teori titik tetap memiliki peran yang sangat penting dalam analisis nonlinier, khususnya dalam menjamin keberadaan dan keunikan solusi dari berbagai permasalahan matematika, seperti persamaan diferensial, optimisasi, dan model-model ekuilibrium. Penelitian ini bertujuan untuk memperluas serta menyempurnakan hasil yang telah diperoleh oleh Gangopadhyay dkk. terkait keunikan titik tetap pada ruang metrik parsial. Dengan mengadopsi pendekatan serupa, Teorema Irisan *Cantor*, studi ini secara sistematis mengeksplorasi keberadaan titik tetap untuk pemetaan yang memenuhi kondisi kontraktif yang telah digeneralisasi, sehingga memperluas cakupan dari teorema titik tetap klasik. Secara khusus, penelitian ini menganalisis kondisi kontraksi tipe *Banach*, *Kannan*, dan *Chatterjea* dalam kerangka ruang metrik parsial. Hasil utama menunjukkan bahwa pemetaan yang memenuhi kondisi kontraktif sebagaimana dirumuskan dalam Teorema 3.1 memiliki titik tetap tunggal. Temuan ini memperluas cakupan penerapan terhadap kelas pemetaan yang lebih luas dalam ruang metrik parsial, termasuk pemetaan transenden, *self-adjust contractions*, serta operator *multivalued*.

Kata Kunci: Kondisi Kontraktif; Ruang Metrik Parsial; Teorema Irisan Cantor; Titik Tetap.

I. Pendahuluan

Teori titik tetap merupakan salah satu konsep dasar matematika yang memainkan peranan penting dalam memecahkan persamaan operator nonlinear. Salah satu kajian utama dalam teori ini adalah memastikan ketunggalan solusi, yaitu menelusuri apakah suatu pemetaan memiliki tepat satu titik tetap dalam ruang yang diberikan. Pada tahun

1992, Stefan Banach memperkenalkan salah satu teorema titik tetap yang kemudian menjadi landasan penting dalam perkembangan teori titik tetap, yaitu Teorema Pemetaan Kontraktif Banach atau kerap disebut sebagai Teorema Titik Tetap Banach [1]. Teorema ini menjamin eksistensi tunggal dari titik tetap untuk suatu pemetaan pada ruang metrik melalui kondisi kontraktif yang diberikan. Pada tahun 1969, Kannan memperluas kondisi kontraktif *Banach* dengan menunjukkan bahwa ketunggalan titik tetap masih dapat dijamin meskipun pemetaan tersebut tidak memenuhi kondisi kontraktif *Banach* [8]. Selanjutnya, Chatterjea memperkenalkan kondisi kontraktif lainnya pada tahun 1972 sebagai bentuk perumuman lebih lanjut dari pendekatan Banach untuk kelas pemetaan yang lebih luas [2].

Dalam dekade terakhir, penelitian terkait titik tetap terus berkembang dan mengalami pergeseran ke arah generalisasi ruang, misalnya dalam ruang quasi-metrik yang dilengkapi oleh relasi urutan parsial dan aplikasinya pada *Fractal Theory* ([12], [15], [16]), dan ruang metrik parsial yang menjadi salah satu subjek penelitian yang dominan. Kajian pada ruang metrik parsial ini telah menghasilkan perumusan teorema titik tetap fundamental, baik untuk berbagai jenis pemetaan kontraktif maupun untuk barisan pemetaan ([4], [5], [9]). Penelitian ini terus berlanjut ke generalisasi ruang, seperti pengembangan teorema titik tetap pada ruang metrik parsial yang dilengkapi relasi urutan parsial [6], dan juga eksplorasi aplikatifnya dalam matematika komputasi melalui metode iteratif dan persamaan integral tipe *Volterra* ([12], [14]).

Meskipun terjadi perkembangan pesat, landasan penting dalam ruang metrik parsial diletakkan melalui berbagai pendekatan klasik. Salah satu pendekatan yang relevan adalah kajian yang dilakukan oleh Gangopadhyay, dkk. pada tahun 2013, yang menerapkan Teorema Irisan Cantor untuk menjamin eksistensi ketunggalan titik tetap pada ruang metrik parsial [7]. Namun, cakupan hasil tersebut masih terbatas pada fungsi-fungsi yang memenuhi dua kondisi kontraktif, yaitu kondisi kontraktif *Banach* dan kondisi kontraktif *Kannan*. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk melakukan perluasan terhadap hasil [7] dengan mempertimbangkan kondisi kontraktif fundamental lainnya, yaitu kondisi kontraktif *Chatterjea*. Dengan memasukkan kondisi ini ke dalam kerangka kerja yang sama, diharapkan hasil yang diperoleh dapat mencakup pemetaan yang lebih luas, memberikan kontribusi signifikan dalam perumuman teorema titik tetap pada Ruang Metrik Parsial.

II. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan teoretis melalui kajian literatur untuk menganalisis dan mengembangkan konsep. Metode yang digunakan berfokus pada telaah mendalam terhadap penelitian-penelitian terdahulu dalam teori titik tetap dan ruang metrik parsial. Secara khusus, penelitian ini mengkaji ulang teorema titik tetap pada ruang metrik parsial yang mencakup teori titik tetap Banach dan Kannan yang dikembangkan oleh [7]. Berdasarkan landasan teoretis tersebut, penelitian ini berupaya memperluas kerangka konseptual yang sudah ada untuk mengakomodasi kondisi pemetaan *Chatterjea*. Proses penelitian ini menitikberatkan pada analisis konseptual, pembandingan sifat-sifat kontraktif dari berbagai pemetaan, serta generalisasi teorema. Untuk memahami kerangka kerja yang

Jurnal Matematika Vol. 16, No.1, Juni 2026, pp. 14-22 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2026.v16.i01.p195

dikembangkan, pembahasan selanjutnya akan diawali dengan pemahaman dasar mengenai titik tetap.

Secara intuitif, titik tetap merujuk pada suatu elemen dalam domain fungsi yang tetap tidak berubah ketika dipetakan oleh fungsi tersebut. Berbagai teorema titik tetap, yang berakar pada definisi dasar, menyediakan landasan bagi pengembangan metode analitis maupun numerik dalam penyelesaian sistem persamaan [19], optimisasi [16], hingga *Game Theory* [11]. Sebagai landasan konseptual untuk pembahasan lebih lanjut, berikut ini diberikan definisi formal mengenai titik tetap.

Definisi 2.1 *Misal X himpunan, $A \subseteq X$, dan fungsi $P: A \to A$. Titik $a \in A$ dikatakan titik tetap dari P jika $P(a) = a$. Himpunan semua titik tetap dari P dinotasikan.*

$$F(P) = \{a \in A | P(a) = a\}. \tag{2.1}$$

Seiring dengan perkembangan teori titik tetap, berbagai jenis pemetaan yang menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap telah diperkenalkan dan diteliti secara mendalam. Salah satu kelas pemetaan yang paling fundamental dalam hal ini adalah pemetaan kontraktif, yang pertama kali dikaji secara sistematis dalam konteks ruang metrik lengkap. Definisi formal mengenai pemetaan kontraksi serta teorema-teorema utama yang terkait, seperti yang dirumuskan oleh Banach, Kannan, dan Chatterjea, memberikan kerangka dasar untuk mengidentifikasi dan menganalisis sifat titik tetap dalam berbagai struktur ruang. Berikut ini disajikan beberapa konsep dan hasil penting yang akan menjadi landasan bagi pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.2 *Misal (X, d) merupakan ruang metrik. Pemetaan $f: X \to X$ dikatakan pemetaan kontraksi jika terdapat suatu konstanta γ dengan $0 \leq \gamma < 1$ sedemikian sehingga untuk setiap $a, b \in X$ berlaku*

$$d(f(a), f(b)) \leq \gamma d(a, b). \tag{2.2}$$

Teorema 2.3 *Misal (X, d) merupakan suatu ruang metrik lengkap dan pemetaan $f: X \to X$ merupakan pemetaan kontraksi maka terdapat tepat satu titik tetap yang dimiliki oleh f.*

Teorema 2.4 *Misal (X, d) merupakan suatu ruang metrik lengkap. Jika untuk semua $a, b \in X$ berlaku pemetaan $f: X \to X$ memenuhi*

$$d\big(f(a), f(b)\big) \leq \beta[d(f(a), a) + d(f(b), b)] \tag{2.3}$$

untuk suatu konstanta $\beta, 0 \leq \beta < 1/2$, maka terdapat tepat satu titik tetap yang dimiliki oleh f.

Teorema 2.5 *Misal (X, d) ruang metrik lengkap. Jika untuk semua $a, b \in X$ berlaku pemetaan $f: X \to X$ memenuhi*

$$d\big(f(a), f(b)\big) \leq \delta\big[d\big(a, f(b)\big) + d(f(a), b)\big] \tag{2.4}$$

untuk suatu konstanta γ, $0 \leq \gamma < 1/2$, *maka terdapat tepat satu titik tetap yang dimiliki oleh* f.

Setelah mengkaji berbagai teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik lengkap, diperlukan perluasan konsep untuk mengakomodasi struktur ruang yang lebih umum. Salah satu bentuk perluasan tersebut adalah pengenalan ruang metrik parsial. Dalam konteks ini, Teorema Irisan Cantor menjadi salah satu alat penting untuk memastikan keberadaan serta ketunggalan titik tetap.

Definisi 2.6 *Misal* X *merupakan himpunan tak kosong. Fungsi* $\rho: X \times X \to R^+$ *disebut metrik parsial jika untuk semua* $a, b, c \in X$ *memenuhi aksioma berikut.*

[P1] $\rho(a,a) \leq \rho(a,b)$,

[P2] $\rho(a,a) = \rho(a,b) = \rho(b,b)$ *maka* $a = b$,

[P3] $\rho(a,b) = \rho(b,a)$,

[P4] $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b) - \rho(c,c)$,

Pasangan (X,ρ) *disebut ruang metrik parsial.*

Definisi 2.7 *Ruang topologi* X *disebut ruang terhitung pertama jika untuk setiap* $p \in X$ *terdapat* $\mathcal{B}_p = \{B_p \in X \mid B_p \ buka \ terhitung\}$ *sehingga untuk setiap* $G_p \in X$ *buka terdapat* $B_p \in \mathcal{B}_p$ *sedemikian sehingga* $p \in B_p \subseteq G_p$.

Lemma 2.8 *Misal* (X,ρ) *ruang metrik parsial. Maka* X *merupakan ruang terhitung pertama.*

Lemma 2.9 *Syarat perlu dan cukup untuk ruang metrik parsial* (X,ρ) *agar lengkap adalah setiap barisan monoton turun dari subset tertutup tidak kosong* (G_n) *pada* (X,ρ) *dengan diameter* $(G_n) \to 0$ *untuk* $n \to 0$ *berlaku* $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ *adalah tunggal.*

III. Hasil dan Pembahasan

Bab ini difokuskan pada perluasan hasil yang telah dikembangkan oleh [7] mengenai ketunggalan titik tetap pada ruang metrik parsial. Pada kajian terdahulu, eksistensi titik tetap tunggal dijamin untuk pemetaan yang secara implisit memenuhi kondisi kontraktif *Banach* dan Kannan melalui syarat yang ditetapkan. Dalam penelitian ini, cakupan tersebut diperluas dengan memasukkan pula kondisi kontraktif *Chatterjea* ke dalam kerangka pembuktian. Untuk itu, dirumuskan suatu teorema baru yang mencakup lebih banyak kelas pemetaan, sebagaimana akan dinyatakan dan dibuktikan pada bagian berikut.

Teorema 3.1 *Misal* (A,ρ) *ruang metrik parsial lengkap dan* $f: A \to A$ *memenuhi.*

$$\rho\big(f(a),f(b)\big) \leq \alpha\rho\big(a,f(a)\big) + \beta\rho\big(b,f(b)\big) + \gamma\rho(a,b) \qquad (3.1)$$

$$+\delta\left(\rho\big(a,f(b)\big) + \rho(f(a),b)\right)$$

Jurnal Matematika Vol. 16, No.1, Juni 2026, pp. 14-22 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2026.v16.i01.p195

dengan $0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta < 1$ *dan* $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta < 1$ *untuk semua* $a, b \in A$. *Maka* f *memiliki tepat satu titik tetap pada* A.

Bukti: Misalkan (A, ρ) ruang metrik parsial lengkap dan $\mathrm{f}: \mathrm{A} \to \mathrm{A}$. Pembuktian ketunggalan titik tetap f pada A akan diselesaikan melalui Lemma 2.9.

i. Akan ditunjukkan (L_k) merupakan barisan monoton dan tak kosong di (A, ρ).

Untuk bilangan asli n, definisikan barisan $e_n = f^n(e_0)$ dengan $e_0 \in A$. Maka melalui aksioma ruang metrik parsial diperoleh bahwa

$$\rho(e_2, e_1) = \rho\big(f(e_1), f(e_0)\big)$$
$$\leq \alpha\rho\big(e_1, f(e_1)\big) + \beta\rho\big(e_0, f(e_0)\big) + \gamma\rho(e_1, e_0)$$
$$+\delta\Big(\rho\big(e_1, f(e_0)\big) + \rho\big(f(e_1), e_0\big)\Big)$$
$$= \alpha\rho(e_2, e_1) + \beta\rho(e_0, e_1) + \gamma\rho(e_0, e_1) + \delta\big(\rho(e_1, e_1) + \rho(e_2, e_0)\big)$$
$$\leq \alpha\rho(e_2, e_1) + \beta\rho(e_0, e_1) + \gamma\rho(e_0, e_1) + \delta\big(\rho(e_2, e_1) + \rho(e_0, e_1)\big)$$
$$= (\alpha + \delta)\rho(e_2, e_1) + (\beta + \gamma + \delta)\rho(e_0, e_1)$$
$$(1 - \alpha - \delta)\rho(e_2, e_1) \leq (\beta + \gamma + \delta)\rho(e_0, e_1)$$
$$\rho(e_2, e_1) \leq \left[\frac{\beta + \gamma + \delta}{1 - \alpha - \delta}\right] \rho(e_0, e_1)$$

Dengan cara yang sama maka, $\rho(e_3, e_2) \leq \left[\frac{\beta+\gamma+\delta}{1-\alpha-\delta}\right]^2 \rho(e_0, e_1)$ dan seterusnya. Sehingga dengan menggunakan induksi diperoleh,

$$\rho(e_{n+1}, e_n) \leq \left[\frac{\beta + \gamma + \delta}{1 - \alpha - \delta}\right]^n \rho(e_0, e_1) = \left[\frac{\beta + \gamma + \delta}{1 - \alpha - \delta}\right]^n \rho\big(e_0, f(e_0)\big).$$

Karena $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta < 1$ maka $\beta + \gamma + \delta < 1 - \alpha - \delta$, sehingga $\frac{\beta+\gamma+\delta}{1-\alpha-\delta} < 1$. Akibatnya $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\beta+\gamma+\delta}{1-\alpha-\delta}\right]^n = 0$.

Selanjutnya, misalkan g_k merupakan suatu barisan bilangan real positif dengan $g_k \geq g_{k+1} \geq g_{k+2} \geq \cdots$, sedemikian sehingga $\lim_{k\to\infty} g_k = 0$.

Misalkan G_k barisan di (A, ρ) dengan $G_k = \{e \in X \mid \rho\big(e, f(e)\big) \leq g_k\}$.

Karena $\rho(e_{n+1}, e_n) \leq \left[\frac{\beta+\gamma+\delta}{1-\alpha-\delta}\right]^n \rho\big(e_0, f(e_0)\big)$ dan $g_k \geq g_{k+1} \geq g_{k+2} \geq \cdots$, maka $G_k \geq G_{k+1} \geq G_{k+2} \geq \cdots$, artinya (G_k) membentuk barisan monoton turun yang tak kosong.

ii. Akan ditunjukkan bahwa $f: G_k \to G_k$.

Misalkan $x \in G_k$, maka

$$\rho\Big(f(x), f\big(f(x)\big)\Big)$$
$$\leq \alpha\rho\big(x, f(x)\big) + \beta\rho\Big(f(x), f\big(f(x)\big)\Big) + \gamma\rho\big(x, f(x)\big)$$
$$+ \delta\Big(\rho\Big(x, f\big(f(x)\big)\Big) + \rho\big(f(x), f(x)\big)\Big)$$
$$\leq \alpha\rho\big(x, f(x)\big) + \beta\rho\Big(f(x), f\big(f(x)\big)\Big) + \gamma\rho\big(x, f(x)\big)$$
$$+ \delta\Big(\rho\big(x, f(x)\big) + \rho\Big(f(x), f\big(f(x)\big)\Big)\Big)$$
$$= (\alpha + \gamma + \delta)\rho\big(x, f(x)\big) + (\beta + \delta)\rho\Big(f(x). f\big(f(x)\big)\Big)\, (1 - \beta - \delta)\rho\Big(f(x), f\big(f(x)\big)\Big)$$
$$\leq (\alpha + \gamma + \delta)\rho\big(x, f(x)\big)$$

$$\rho\left(f(x), f\left(f(x)\right)\right) \leq \left[\frac{\alpha+\gamma+\delta}{1-\beta-\delta}\right] \rho\big(x, f(x)\big)$$

Karena $\alpha+\beta+\gamma+2\delta<1$ maka $\alpha+\gamma+\delta<1-\beta-\delta$, sehingga $\frac{\alpha+\gamma+\delta}{1-\beta-\delta}<1$ dan $\rho\big(x, f(x)\big) \leq g_k$.

Akibatnya, $\rho\left(f(x), f\left(f(x)\right)\right) \leq g_k$, artinya $f(x) \in G_k$.

Hal ini menunjukkan bahwa $f: G_k \rightarrow G_k$.

iii. Akan ditunjukkan G_k tutup untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

Misalkan p titik limit dari G_k. Karena ruang metrik parsial merupakan ruang terhitung pertama, maka terdapat suatu barisan $(x_j) \in G_k$ sedemikian sehingga $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = p$.

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
\rho\big(p, f(p)\big) &\leq \rho(p, x_j) + \rho\left(x_j, f(p)\right) - \rho(x_j, x_j) \\
&\leq \rho(p, x_j) + \rho\left(x_j, f(p)\right) \\
&\leq \rho(p, x_j) + \rho\left(x_j, f(x_j)\right) + \rho\left(f(x_j), f(p)\right) - \rho\left(f(x_j), f(x_j)\right) \\
&\leq \rho(p, x_j) + \rho\left(x_j, f(x_j)\right) + \rho\left(f(x_j), f(p)\right) \\
&\leq \rho(p, x_j) + \rho\left(x_j, f(x_j)\right) + \alpha\rho\left(x_j, f(x_j)\right) + \beta\rho\big(p, f(p)\big) + \gamma\rho(x_j, p) \\
&\quad +\delta\left(\rho\left(x_j, f(p)\right) + \rho\big(f(x_j), p\big)\right) \\
&\leq \rho(x_j, p) + \rho\left(x_j, f(x_j)\right) + \alpha\rho\left(x_j, f(x_j)\right) + \beta\rho\big(p, f(p)\big) + \gamma\rho(x_j, p) \\
&\quad +\delta\left(\rho(x_j, p) + \rho\big(p, f(p)\big) + \rho\left(x_j, f(x_j)\right) + \rho(x_j, p)\right) \\
&= (1+\gamma+2\delta)\rho(x_j, p) + (1+\alpha+\delta)\rho\left(x_j, f(x_j)\right) \\
&\quad +(\beta+\delta)\rho\big(p, f(p)\big)
\end{aligned}$$

$$(1-\beta-\delta)\rho\big(p, f(p)\big) \leq (1+\gamma+2\delta)\rho(x_j, p) + (1+\alpha+\delta)\rho\left(x_j, f(x_j)\right)$$

$$\rho\big(p, f(p)\big) \leq \left[\frac{1+\alpha+2\delta}{1-\beta-\delta}\right]\rho(x_j, p) + \left[\frac{1+\alpha+\delta}{1-\beta-\delta}\right]\rho\left(x_j, f(x_j)\right)$$

Karena $x_j \in G_k$ dan $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = p$ maka $\rho\left(x_j, f(x_j)\right) \leq g_k$ dan $\lim\limits_{j\to\infty} \rho(x_j, p) = 0$, sehingga $\rho\big(p, f(p)\big) \leq \left[\frac{1+\alpha+\delta}{1-\beta-\gamma}\right] g_k$.

Karena $\alpha+\beta+\gamma+2\delta<1$ dan $0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta < 1$, maka $\frac{\alpha+\gamma+\delta}{1-\beta-\delta}<1$, sehingga $\lim\limits_{\gamma} \left(\frac{\alpha+\gamma+\delta}{1-\beta-\delta}\right) \leq 1$.

Oleh karena itu $\left(\frac{1+\alpha+\delta}{1-\beta-\delta}\right) \leq 1$, akibatnya $\rho\big(p, f(p)\big) \leq g_k$.

Hal ini menunjukkan bahwa $f(p) \in G_k$.

iv. Akan ditunjukkan bahwa diameter $(G_k) \rightarrow 0$ untuk $k \rightarrow \infty$.

Ambil $p, q \in G_k$ sembarang. Maka,

$$\rho(p, q) \leq \rho\big(p, f(p)\big) + \rho\big(f(p), q\big) - \rho\big(f(p), f(p)\big)$$

Jurnal Matematika Vol. 16, No.1, Juni 2026, pp. 14-22 ISSN: 1693-1394
Article DOI: 10.24843/JMAT.2026.v16.i01.p195

$$\leq \rho\big(p,f(p)\big)+\rho\big(f(p),q\big)$$
$$\leq \rho\big(p,f(p)\big)+\rho\big(f(p),f(q)\big)+\rho\big(f(q),q\big)-\rho\big(f(q),f(q)\big)$$
$$\leq \rho\big(p,f(p)\big)+\rho\big(f(p),f(q)\big)+\rho\big(f(q),q\big)$$
$$\leq \rho\big(p,f(p)\big)+\rho\big(f(q),q\big)+\alpha\rho\big(p,f(p)\big)+\beta\rho\big(q,f(q)\big)+\gamma\rho(p,q)$$
$$+\delta\left(\rho\big(p,f(q)\big)+\rho\big(f(p),q\big)\right)$$
$$\leq \rho\big(p,f(p)\big)+\rho\big(f(q),q\big)+\alpha\rho\big(p,f(p)\big)+\beta\rho\big(q,f(q)\big)+\gamma\rho(p,q)$$
$$+\delta\left(\rho(p,q)+\rho\big(q,f(q)\big)+\rho\big(f(p),p\big)+\rho(p,q)\right)$$
$$\leq (1+\alpha+\delta)\rho\big(p,f(p)\big)+(1+\beta+\delta)\rho\big(q,f(q)\big)+(\gamma+2\delta)\rho(p,q)$$
$$(1-\gamma-2\delta)\rho(p,q)\leq (1+\alpha+\delta)\rho\big(p,f(p)\big)+(1+\beta+\delta)\rho\big(q,f(q)\big)$$
$$\rho(p,q)\leq\left[\frac{1+\alpha+\delta}{1-\gamma-2\delta}\right]\rho\big(p,f(p)\big)+\left[\frac{1+\beta+\delta}{1-\gamma-2\delta}\right]\rho\big(q,f(q)\big)$$

Karena $p,q\in G_k$ maka $\rho\big(p,f(p)\big)\leq g_k$ dan $\rho\big(q,f(q)\big)\leq g_k$, sehingga

$$\rho(p,q)\leq\left[\frac{2+\alpha+\beta+2\delta}{1-\gamma-2\delta}\right]g_k$$

Tinjau bahwa $\lim_{k\to\infty} g_k=0$ maka $\lim_{k\to\infty} diam\,(G_k)=\lim_{k\to\infty}\left[\sup_{p,q\in G_k} p(p,q)\right]=0.$

Artinya diameter $(G_k)\to 0$ untuk $k\to\infty$.

Berdasarkan (i), (ii), (iii), dan (iv) maka diperoleh bahwa untuk setiap $(G_k)\in(A,\rho)$, (G_k) merupakan barisan monoton, tak kosong, dan tutup untuk setiap $k\in\mathbb{N}$, dengan diameter $(G_k)\to 0$ untuk $k\to\infty$. Berdasarkan Lemma 2.9 maka $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ merupakan singleton. Misalkan $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k=a$ untuk suatu $a\in A$. Akibatnya, berlaku $f(p)=p$. ■

Teorema 3.1 memberikan kondisi yang cukup untuk menjamin keberadaan serta keunikan titik tetap dari suatu pemetaan pada ruang metrik parsial. Hasil ini tidak hanya berdiri sendiri, tetapi juga dapat digunakan untuk menurunkan berbagai kasus khusus yang telah dikenal dalam literatur. Dengan memilih parameter tertentu pada Ketaksamaan (2.1), Teorema 3.1 menghasilkan beberapa akibat langsung yang menggeneralisasi bentuk kontraksi klasik maupun pemetaan tipe Kannan. Akibat-akibat berikut menunjukkan bagaimana teorema utama ini dapat diaplikasikan pada kelas pemetaan yang lebih spesifik.

Dengan mengambil $\alpha=\beta=\delta=0$ dan $0<\gamma<1$ pada Teorema 3.1 maka diperoleh Akibat 3.2 berikut:

Akibat 3.2 *Misal (X,ρ) ruang metrik parsial lengkap dan $f\colon X\to X$ merupakan suatu fungsi yang terdefinisi di X. Jika f merupakan suatu pemetaan kontraksi, maka f memiliki tepat satu titik tetap di X.*

Sementara, jika $\gamma=\delta=0$ dan $0\leq\alpha=\beta<1$ diambil dari Teorema 3.1 maka diperoleh Akibat 3.3 sebagai berikut:

Akibat 3.3 *Misal (X,ρ) ruang metrik parsial lengkap dan $f: X \to X$ merupakan suatu fungsi yang terdefinisi di X. Jika f merupakan suatu pemetaan yang memenuhi kondisi kontraksi tipe Kannan, maka f memiliki tepat satu titik tetap di X.*

Akibat terakhir dari Teorema 3.1 berikut diperoleh dengan mengambil $\alpha = \beta = \gamma = 0$ dan $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

Akibat 3.4 *Misal (X,ρ) ruang metrik parsial lengkap dan $f: X \to X$ merupakan suatu fungsi yang terdefinisi di X. Jika f merupakan suatu pemetaan yang memenuhi kondisi kontraksi tipe Chatterjea, maka f memiliki tepat satu titik tetap di X.*

Ketiga akibat yang telah diperoleh menunjukkan bahwa Teorema 3.1 memiliki cakupan yang luas, karena mampu menggeneralisasi beberapa hasil penting yang sebelumnya dikenal dalam teori titik tetap, termasuk pemetaan kontraktif klasik maupun tipe Kannan dan tipe Chatterjea. Hal ini menegaskan bahwa teorema tersebut tidak hanya bersifat umum, tetapi juga fleksibel untuk diterapkan pada berbagai kondisi khusus. Untuk memberikan gambaran yang lebih nyata mengenai penerapannya, selanjutnya ditampilkan sebuah contoh sederhana yang mengilustrasikan eksistensi titik tetap tunggal dari suatu pemetaan dalam ruang metrik parsial.

Contoh 3.5 *Misalkan $(\mathbb{R},\rho)$ ruang metrik parsial lengkap dan untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ definisikan $f(x) = \frac{sin(x)}{2}$. Jika ρ merupakan fungsi yang didefinisikan oleh:*

$$\rho(x,y) = |x - y|,$$

untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$, maka f memiliki titik tetap tunggal di $\mathbb{R}$.

Bukti: Pilih $\alpha = \beta = \delta = 0$ dan $\gamma = \frac{1}{2} \in (0,1]$, *maka* untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} \rho\big(f(x), f(y)\big) &= |f(x) - f(y)| \\ &= \left|\frac{\sin(x)}{2} - \frac{\sin(y)}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}|\sin(x) - \sin(y)| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - y| = \gamma\rho(x,y). \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta = \frac{1}{2} < 1$. Berdasarkan Teorema 3.1, terbukti f memiliki tepat satu titik tetap di $\mathbb{R}$. Lebih lanjut, titik tetap dari f ialah $x = 0 \in \mathbb{R}$.

IV. Kesimpulan

Berdasarkan pada hasil yang telah diperoleh maka dapat diambil kesimpulan bahwa melalui Irisan Cantor pada Lemma 2.9 dapat dibuktikan bahwa fungsi yang memenuhi Persamaan (3.1) memiliki titip tetap tunggal pada ruang metrik parsial dengan syarat atau kondisi kontraktif yang telah diberikan pada Teorema 3.1, termasuk kondisi kontraktif klasik yaitu *Banach* (2.2), maupun *Kannan* (2.3) dan *Chatterjea* (2.4).

Daftar Pustaka

[1] Banach, S., Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fund. Math., 3, 133-181, 1922.
[2] Chatterjea, S. K., Fixed Point Theorems, C. R. Acad. Bulgare Sci., 25(6), 727-730, 1972.
[3] Debnath, P., et al., Metric Fixed Point Theory: Applications in Science, Engineering and Behavioural Sciences (1st ed.), Singapore: Springer-Verlag, 2021.
[4] Dey, M., & Hiral Raja, Advanced Fixed-Point Theorems in Partial Metric Spaces under Generalized Contractive Mappings, International Journal for Multidisciplinary Research, 2025,
[5] Dwivedi, P. K., Common Fixed Point Theorem on Partial Metric Space, International Journal of Mathematics and Trends in Technology, 68(4), 1-8, 2022.
[6] Ekayanti, A., Muslikh, M., Fitri, S., & Marjono., Fixed Point Theorem in Partially Ordered Partial Metric Spaces. Advances in Fixed Point Theory, 13(19), 1-13, 2023.
[7] Gangopadhyay, M., Saha, M., Baisnab, A.P., Some Fixed Point Theorems in Partial Metric Spaces, TWMS J. App. Eng. Math, 3(2), 206-213, 2013.
[8] Kannan, R., Some Results on Fixed Points II, The American Mathematical Monthly, 76(4), 405-408, 1969.
[9] Karapınar, E., & Agarwal, R. P., Fixed Point Theorems in Partial Metric Spaces. In: Topics in Fixed Point Theory, 129–158, Springer, Cham., 2022.
[10] Pant, R., Shukla, R., Nashine, H. K., & Panicker, R., Some New Fixed Point Theorems in Partial Metric Spaces with Applications, Journal of Function Spaces, 2017, Article ID 1072750, 2017.
[11] Rajagopalan R., & Alghazwani M. L. H., Certain Applications of Fixed Points to Game Theory, International Journal of Difference Equations, 17(2), 293-303, 2022.
[12] Royden, H. L., and Patrick M. Fitzpatrick, Real Analysis Fifth Edition, New York: Pearson Education, Inc., 2023.
[13] Secelean, N.A., Mathew, S. & Wardowski, D. New fixed point results in quasi-metric spaces and applications in fractals theory. Adv Differ Equ., 177, 2019.
[14] Simmon B., Real Analysis: A Comprehensive Course in Analysis, Part 1., American Mathematical Society, 2015.
[15] Soni, S., & Chandrakar, R., Fixed Points in Partial Metric Spaces and Their Applications in Computational Mathematics, International Interdisciplinary Research Consortium Journal, 12(1), 1-12, 2025.
[16] Vinsensia D., Utami Y., Awawdeh B. K., & Bausch N. B., Advancing optimization algorithms with fixed point theory in generalized metric vector spaces, International Journal of Basic and Applied Science, 13(3), 146-156, 2024.
[17] Zuhra, R., Md Noorani, M. S., A Fixed Point Theorem in Partially Ordered Quasi Metric Space, 12th International Conference on Mathematics, Statistics, and Their Applications (ICMSA), 16-18, 2016.
[18] Zuhra, R., Md Noorani, M. S., Shaddad, F., A Common Fixed Point Theorem of Weak Contraction Mappings on Partially Ordered Quasi Metric Space, The 4th International Conference on Mathematical Sciences: Mathematical Sciences: Championing the Way in a Problem Based and Data Driven Society, 1830 (1), 2017.
[19] Zuhri A. H., Soeharyadi Y., & Widjaja J., On Conditions for Controllability and Local Regularity of a System of Differential Equations, Journal of the Indonesian Mathematical Society, 29 (02), 259-270, 2023.