

Kontrol Optimal untuk Model SIR Campak dengan Imunisasi Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin

Dhea Wasila Rahmi¹, Elyin Fitrawati², Amilia Ulul Azmi³, Bulqis Nebulla Syechah⁴, Tri Maryono Rusadi^{5*}

^{1,2,3,4,5}Program Studi Matematika, Universitas Mataram, Kota Mataram, NTB, Indonesia.

*Corresponding Author. Email: rusadi.tm@staff.unram.ac.id

ABSTRACT

Measles is a contagious disease that continues to affect a significant portion of the population, particularly infants and children. The disease can be prevented through immunization programs, including both basic and booster immunizations, which are part of government public health initiatives. This study aims to reduce the spread of measles while minimizing immunization costs by incorporating a control variable into the SIR (Susceptible–Infected–Recovered) model of disease transmission. The method employed is Pontryagin’s Minimum Principle to determine the optimal immunization strategy that is both effective and cost-efficient. The results indicate that the inclusion of an immunization control in the model significantly decreases the susceptible population and reduces the growth rate of the infected compartment. Furthermore, the recovered population increases more rapidly compared to the model without control. The proportion of the immunized population demonstrates that a more optimal control strategy leads to greater effectiveness in suppressing disease transmission. Therefore, the application of optimal control in the SIR model provides a valuable mathematical framework to support immunization policies for measles prevention and control.

Keywords: Measles; SIR model; Optimal control; Pontryagin’s Minimum Principle.

ABSTRAK

Campak merupakan salah satu penyakit menular yang masih sering terjadi di masyarakat, terutama pada bayi dan anak-anak. Penyakit ini dapat dicegah melalui program imunisasi, baik imunisasi dasar maupun imunisasi lanjutan, yang menjadi bagian dari kebijakan pemerintah dalam upaya pengendalian penyakit menular. Penelitian ini bertujuan untuk menekan penyebaran campak sekaligus meminimalkan biaya pelaksanaan imunisasi dengan menambahkan variabel kontrol pada model SIR (*Susceptible–Infected–Recovered*). Pendekatan yang digunakan adalah Prinsip Minimum Pontryagin untuk menentukan strategi kontrol optimal berupa tingkat pemberian imunisasi yang efektif dan efisien. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penambahan kontrol imunisasi dalam model mampu menurunkan jumlah populasi rentan secara signifikan serta mengurangi laju peningkatan populasi terinfeksi. Selain itu, jumlah populasi yang pulih meningkat lebih cepat dibandingkan model tanpa kontrol. Nilai proporsi populasi yang diimunisasi juga menunjukkan bahwa semakin optimal tingkat kontrol yang diterapkan, semakin efektif pula upaya penekanan penyebaran penyakit. Dengan demikian, penerapan kontrol optimal pada model SIR dapat menjadi strategi matematis yang tepat dalam mendukung kebijakan imunisasi untuk pengendalian campak

Kata Kunci: Campak; Model SIR; Kontrol Optimum; Prinsip Minimum Pontryagin.



This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. Copyright © 2026 by the Author(s).

I. Pendahuluan

Campak merupakan penyakit infeksi yang disebabkan oleh virus dari genus Morbillivirus, yang termasuk dalam kelompok virus RNA. Penularan campak terjadi melalui percikan air liur penderita saat batuk atau bersin, serta melalui kontak langsung dengan orang yang terinfeksi. Penyakit campak di Indonesia masih menjadi masalah kesehatan yang perlu perhatian serius karena jumlah kasusnya yang tinggi dan masih adanya kejadian luar biasa (KLB). KLB campak terjadi ketika terdapat lima atau lebih kasus klinis yang terjadi dalam waktu empat minggu berturut-turut secara berkelompok dengan hubungan epidemiologis. Kasus suspek campak tersebar hampir di seluruh provinsi. Pada tahun 2018, tercatat sebanyak 8.429 kasus dengan 85 KLB suspek campak, jumlah yang jauh lebih rendah dibandingkan tahun 2017 yang mencapai 15.104 kasus dengan 349 KLB [1].

Penyakit campak disebabkan oleh mikroorganisme yang dapat menular dari satu individu ke individu lainnya, terutama pada bayi atau anak-anak. Penularannya sangat mudah terjadi melalui sistem pernapasan manusia, terutama lewat *droplet* atau cairan yang keluar dari saluran pernapasan, misalnya saat seseorang batuk, bersin, atau berbicara. Campak merupakan penyakit yang dapat dicegah dengan pemberian imunisasi [2]. Upaya pencegahan dilakukan melalui imunisasi campak. Salah satu program imunisasi yang dilaksanakan pemerintah adalah imunisasi rutin, yang mencakup imunisasi dasar dan imunisasi lanjutan. Imunisasi dasar lengkap dan imunisasi lanjutan yang diwajibkan pemerintah termasuk imunisasi campak [3].

Kepatuhan diartikan sebagai perilaku seseorang dalam mengikuti anjuran medis atau rekomendasi kesehatan sesuai dengan ketentuan yang telah diberikan. Pemahaman yang mendalam mengenai faktor ini sangat penting, terutama bagi orang tua dan tenaga kesehatan, untuk meningkatkan kepatuhan dalam pelaksanaan imunisasi dasar. Dengan begitu, efektivitas terapi dapat dipantau secara optimal [4]. Selain imunisasi, penyakit campak juga dapat dicegah dengan pemberian vaksin. Sebelum vaksin campak diperkenalkan pada tahun 1963, rata-rata terdapat 549.000 kasus campak dan 495 kematian setiap tahunnya di Amerika. Hampir seluruh penduduk Amerika terkena campak, dengan estimasi 3-4 juta kasus per tahun. Setelah program vaksinasi dosis pertama dimulai, terjadi penurunan signifikan dalam jumlah kasus campak selama tahun 1980-an. Namun, pada akhir dekade tersebut, wabah campak masih terjadi di kalangan anak-anak usia sekolah yang hanya menerima satu dosis vaksin. Akibatnya, pada tahun 1989, vaksinasi dosis kedua mulai direkomendasikan. Selama periode 1989-1991, dilaporkan lebih dari 55.000 kasus campak dan 123 kematian, dengan epidemi yang terutama terjadi pada anak-anak prasekolah dari kelompok kurang mampu yang tidak mendapatkan vaksin dosis pertama tepat waktu. Peningkatan pemberian vaksin dosis pertama dan kedua secara tepat waktu pada anak usia sekolah berhasil menurunkan jumlah kasus campak [5].

Campak masih menjadi salah satu penyebab utama morbiditas dan mortalitas di seluruh dunia, dengan estimasi sekitar 9,7 juta kasus dan lebih dari 140.000 kematian akibat campak pada tahun 2018. Penyakit ini memiliki tingkat penularan yang sangat tinggi dan membutuhkan cakupan kekebalan komunitas yang besar untuk mencegah terjadinya wabah. Wabah campak juga dapat digunakan sebagai indikator untuk mendeteksi adanya kesenjangan dalam pelayanan kesehatan masyarakat dan membantu mengidentifikasi kekurangan pada program imunisasi serta sistem layanan kesehatan primer [6]. Di Indonesia, data terbaru menunjukkan peningkatan yang signifikan dalam jumlah kasus campak. Pada tahun 2023,

tercatat lebih dari 3.341 kasus, meningkat hingga 32 kali lipat dibandingkan dengan jumlah kasus pada tahun 2021 dan 2022 [7].

Beragam model matematika telah dikembangkan dan dibahas untuk menjelaskan penyebaran penyakit campak, dengan mempertimbangkan berbagai batasan masalah. Penyusunan model penyebaran penyakit ini dilakukan menggunakan beberapa pendekatan, diantaranya melakukan analisis kestabilan model SEIR pada penyebaran penyakit campak dengan pengaruh imunisasi dan vaksinasi MR [8]. Hasil yang diperoleh berupa dua titik kesetimbangan yang menunjukkan adanya penurunan laju penyebaran penyakit campak. Hakim [9] melakukan rekonstruksi terhadap model matematika penyebaran penyakit campak dengan melibatkan variabel kontrol berupa pengurangan kontak langsung antara sub populasi rentan dengan sub populasi terinfeksi. Hasil yang diperoleh bahwa pengontrolan tersebut efektif dalam menekan laju penyebaran penyakit campak. Penelitian sebelumnya menguraikan bahwa model penyebaran penyakit campak dengan penggunaan vaksin permanen menunjukkan dampak pada penurunan jumlah populasi manusia yang terinfeksi penyakit campak [10].

Pengembangan model SIR untuk menggambarkan penyebaran penyakit campak, yang terdiri dari tiga subpopulasi yaitu *Susceptible* (S), *Infected* (I), *Recovered* (R). Penelitian ini menambahkan kontrol berupa vaksinasi pada subpopulasi *Infected* (I) untuk menekan jumlah individu terinfeksi dan meningkatkan subpopulasi yang sembuh (*Recovered* (R)). Hasilnya menunjukkan bahwa pemberian vaksinasi secara tepat dapat secara signifikan mengurangi penyebaran penyakit campak [11].

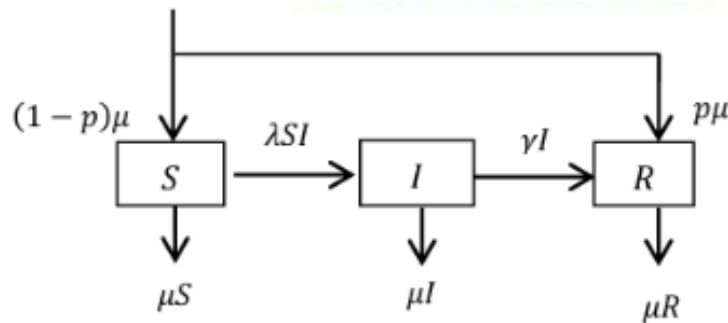
Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini bertujuan untuk mendukung upaya pemerintah dalam mengendalikan, mengurangi, dan menghilangkan penyebaran penyakit campak pada populasi manusia melalui penerapan model SIR dengan pengaruh imunisasi. Model yang digunakan adalah model yang telah dikembangkan sebelumnya [12] dengan menambahkan variabel pengontrol terhadap parameter imunisasi. Penggunaan imunisasi sebagai pengontrol bertujuan untuk meminimalkan biaya imunisasi sekaligus menekan penyebaran penyakit campak secara efektif. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam perencanaan program imunisasi massal yang lebih efisien dan tepat sasaran, khususnya dalam rangka menurunkan angka infeksi pada populasi rentan melalui pendekatan matematis yang terukur dan berbasis data.

II. Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian terapan yang menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin dalam mengoptimalkan biaya imunisasi dan jumlah orang yang terinfeksi penyakit campak. Model yang digunakan dalam penelitian ini merupakan model SIR dengan pengaruh imunisasi, sebagaimana dijelaskan dalam penelitian oleh Aisyah Noer Aziziah pada tahun 2017 [12], dalam model tersebut, populasi terbagi menjadi tiga kompartemen, yaitu *Susceptible* (S), *Infected* (I), dan *Recovered* (R). Kompartemen *Susceptible* (S) adalah individu yang rentan, yaitu mereka yang tidak memiliki kekebalan terhadap penyakit dan dapat terinfeksi. Kompartemen *Infected* (I) adalah individu yang telah terinfeksi dan dapat menularkan penyakit kepada individu yang rentan. Kompartemen *Recovered* (R) adalah individu yang telah sembuh dari penyakit atau yang telah diimunisasi sehingga kebal terhadap infeksi [13]. Pada penelitian ini, imunisasi dilakukan terhadap individu baru lahir atau anak-anak, dengan tingkat keberhasilan vaksinasi sebesar 80%, sebagaimana diasumsikan dalam

model. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk meminimalkan biaya imunisasi sekaligus menekan penyebaran penyakit campak secara efektif melalui penerapan kontrol optimal.

Berikut ini disajikan diagram kompartemen dari model penyebaran penyakit campak:



Gambar 1. Diagram alir model epidemi SIR dengan pengaruh imunisasi

Berdasarkan Gambar 1, model epidemi SIR dengan pengaruh imunisasi dapat diekspresikan sebagai berikut [12]:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1-p)\rho - (\lambda I + \mu)S \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda SI - [\gamma + \mu]I \\ \frac{dR}{dt} &= p\mu + \gamma I - \mu R \end{aligned} \quad (1)$$

dengan:

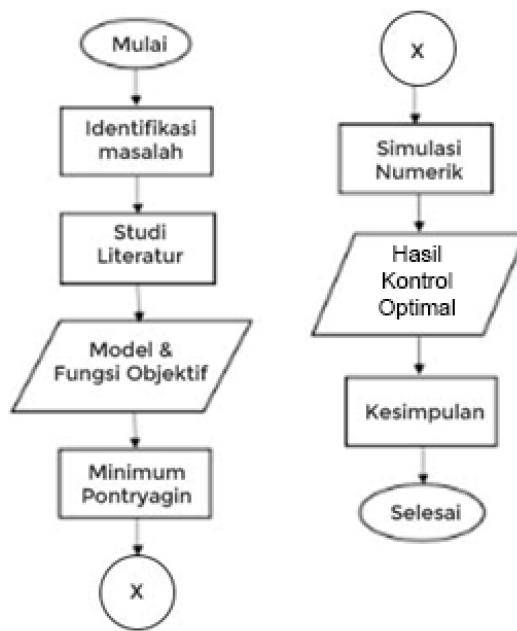
- $\frac{dS}{dt}$: Laju perubahan individu pada populasi *susceptible*
- $\frac{dI}{dt}$: Laju perubahan individu pada populasi *infected*
- $\frac{dR}{dt}$: Laju perubahan individu pada populasi *recovered*
- μ : Laju kematian
- ρ : Laju kelahiran
- λ : Laju serangan infeksi
- γ : Laju kesembuhan individu terinfeksi
- p : Proporsi populasi yang telah diimunisasi

Untuk memastikan bahwa model dasar yang digunakan dalam penelitian ini valid, dilakukan verifikasi struktur model dan validasi hasil solusi dengan membandingkannya terhadap model yang dikembangkan oleh Aziziah [12]. Verifikasi dilakukan dengan menyamakan bentuk sistem persamaan diferensial model tanpa kontrol, yaitu model SIR dengan pengaruh imunisasi, yang mencakup tiga kompartemen populasi: *Susceptible* (S), *Infected* (I), dan *Recovered* (R). Struktur model yang digunakan telah dipastikan identik dengan model [12].

Selanjutnya, dilakukan validasi terhadap hasil solusi model tanpa kontrol melalui simulasi numerik dengan menggunakan nilai parameter yang sama seperti pada penelitian [12], yaitu

$\lambda = 0.4, \gamma = 0.04, \mu = 0.02$, dan variasi $p = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$. Grafik hasil simulasi yang diperoleh menunjukkan pola perubahan populasi terinfeksi (*infected*) terhadap umur yang sangat mirip dengan grafik pada penelitian Aziziah [12]. Hal ini membuktikan bahwa model tanpa kontrol yang digunakan dalam penelitian ini menghasilkan solusi yang konsisten dan sesuai dengan model terdahulu, sehingga dapat digunakan sebagai dasar untuk pengembangan model kontrol optimal.

Langkah-langkah penelitian yang dilakukan disajikan dalam flowchart berikut:



Gambar 2. Diagram alur penelitian

Berikut adalah penjelasan setiap langkah pada flowchart tersebut:

a) Identifikasi Masalah

Tahap ini bertujuan untuk memahami masalah yang akan diselesaikan dengan kontrol optimal. Identifikasi masalah meliputi pemahaman mengenai tujuan sistem, batasan yang ada, dan parameter-parameter kunci yang mempengaruhi kinerja sistem.

b) Studi Literatur

Setelah masalah diidentifikasi, dilakukan studi literatur untuk memahami penelitian-penelitian atau metode-metode yang sudah ada. Hal ini bertujuan agar bisa memanfaatkan metode terbaik dan menambah referensi untuk merancang sistem kontrol optimal yang efektif.

c) Membangun Model Kontrol Optimum

Pada tahap ini, model dari masalah dibuat bersama dengan fungsi objektif. Fungsi objektif ini menentukan tujuan yang ingin dicapai oleh kontrol optimal, dalam hal ini meminimalkan biaya vaksin dan jumlah orang yang terinfeksi.

d) Minimum Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin diterapkan di sini sebagai metode untuk mendapatkan solusi optimal. Prinsip ini membantu menentukan kontrol optimal yang memenuhi fungsi objektif dengan cara mendefinisikan kondisi batas dan solusi optimal untuk sistem.

e) Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk menguji dan memvalidasi hasil dari model dan kontrol yang telah dibuat. Simulasi ini memberikan gambaran tentang bagaimana sistem akan bekerja secara real-time dan membantu mengidentifikasi potensi perbaikan.

f) Kesimpulan

Kesimpulan dibuat berdasarkan hasil dari semua tahapan sebelumnya. Di sini, dievaluasi apakah kontrol optimal yang diterapkan benar-benar menyelesaikan masalah dengan efisien dan memenuhi semua tujuan yang telah ditetapkan.

III. Hasil dan Pembahasan

Pada penelitian ini, akan diterapkan pengontrol terhadap parameter imunisasi yang ada dalam sistem persamaan diferensial model matematika SIR dengan pengaruh imunisasi. Pengontrolan yang tepat dapat membantu untuk meminimalkan biaya imunisasi sekaligus menekan penyebaran penyakit campak secara efektif. Variabel kontrol $u(t)$ merepresentasikan tingkat atau proporsi imunisasi terhadap populasi rentan pada usia tertentu. Untuk mencapai tujuan yang diinginkan, variabel $u(t)$ akan dikalikan dengan variabel $S(t)$. Dengan demikian, sistem persamaan diferensial model SIR pada persamaan (1) berubah menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1 - p)\rho - (\lambda I + \mu)S - u(t)S \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda IS - (\gamma + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} &= p\mu + \gamma I - \mu R \end{aligned} \quad (2)$$

Selanjutnya untuk mengetahui efektivitas dari pengontrolan yang telah diterapkan, maka akan diberikan fungsi objektif yang digunakan dalam masalah kontrol optimal ini. Fungsi objektif akan digunakan sebagai bahan untuk mengevaluasi keberhasilan strategi pengendalian penyakit campak yang merepresentasikan total biaya selama periode waktu tertentu. Fungsi objektif yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$J(u(t)) = \min \int_0^T (C_1 I(t) + C_2 u(t)^2) dt \quad (3)$$

dimana C_1 merupakan bobot biaya akibat individu yang terinfeksi, C_2 menyatakan bobot biaya intervensi (pengontrol) dan $u(t)$ menyatakan fungsi kontrol yang mengatur intensitas imunisasi atau intervensi pada usia a , dengan domain $0 \leq u(t) \leq 1$. Maka berdasarkan prinsip *Pontryagin* [14], kondisi optimal dapat diperoleh dengan menentukan persamaan hamilton dari sistem persamaan (2) dengan persamaan (3) yaitu:

$$H = L(S, I, R, u) + \lambda_s \frac{dS}{dt} + \lambda_I \frac{dI}{dt} + \lambda_R \frac{dR}{dt} \quad (4)$$

Dimana :

$L(S, I, R, u) = C_1 I + C_2 u^2$ adalah fungsi biaya

$\lambda_s, \lambda_I, \lambda_R$: Variabel *costate* yang menggambarkan sensitivitas fungsi tujuan terhadap perubahan S, I, R

Substitusi persamaan dinamika $\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt}$ ke dalam H :

$$H = C_1 I + C_2 u^2 + \lambda_S((1-p)\rho - (\lambda I + \mu)S - u(t)S) + \lambda_I(\lambda I S - (\gamma + \mu)I) + \lambda_R(p\mu + \gamma I - \mu R) \quad (5)$$

Menurut prinsip *Pontryagin*, kondisi optimal dari fungsi *Hamilton* akan dapat diperoleh ketika tiga hal berikut terpenuhi.

A. Persamaan *State*

Persamaan *state* merupakan suatu sistem yang dapat dijadikan kendala dalam permasalahan kontrol optimal. Persamaan *state* ini dapat diperoleh dengan menurunkan fungsi *Hamilton* terhadap masing-masing λ sebagai berikut [15].

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda_S} &= \frac{dS}{dt} = (1-p)\mu - (\lambda I + \mu)S - u(t)S \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_I} &= \frac{dI}{dt} = \lambda I S - (\gamma + \mu)I \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_R} &= \frac{dR}{dt} = p\mu + \gamma I - \mu R \end{aligned} \quad (6)$$

B. Persamaan *Costate (Adjoint)*

Persamaan *costate* pada fungsi *Hamilton* dapat diperoleh dari menegatifkan fungsi *Hamilton* dengan menurunkan variabel-variabel statenya. Gunakan kondisi *Euler-Lagrange*, dimana turunan parsial $\frac{\partial H}{\partial S}, \frac{\partial H}{\partial I}, \frac{\partial H}{\partial R}$ memberikan dinamika *costate* [15]:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_S}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial S} \\ \frac{d\lambda_I}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I} \\ \frac{d\lambda_R}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial R} \end{aligned} \quad (7)$$

persamaan *costate* menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial S} &= -\lambda_S(-\lambda I - \mu - u) - \lambda_I(\lambda I) \\ \frac{\partial H}{\partial I} &= -C_1 + \lambda_S \lambda - \lambda_I(\lambda S - \gamma - \mu) - \lambda_R \gamma \\ \frac{\partial H}{\partial R} &= \lambda_R \mu \end{aligned} \quad (8)$$

C. Kondisi Optimal

Kondisi optimal untuk kontrol $u(t)$ diperoleh dari [15]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 2C_2u - \lambda_S S = 0 \\ u^* &= \frac{\lambda_S S}{2C_2}\end{aligned}\tag{9}$$

Karena $0 \leq u(t) \leq 1$, maka diperoleh

$$u^* = \begin{cases} 0, & u(t) \leq 0 \\ u, & 0 < u(t) < 1 \\ 1, & u(t) \geq 1 \end{cases}$$

diperoleh pengontrol optimal yaitu :

$$u^*(t) = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\lambda_S S}{2C_2} \right), 1 \right\}\tag{10}$$

Kontrol optimal yang diperoleh, akan disubstitusi ke dalam persamaan (7) dan (8), sehingga didapatkan persamaan *State* optimal dan persamaan *Costate* optimal sebagai berikut.

- Persamaan *State* Optimal

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \lambda_S} &= \frac{dS}{dt} = (1-p)\rho - (\lambda I + \mu)S \\ &\quad - \left(\min \left\{ \max \left(0, \frac{\lambda_S S}{2C_2} \right), 1 \right\} \right) S \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_I} &= \frac{dI}{dt} = \lambda IS - (\gamma + \mu)I \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_R} &= \frac{dR}{dt} = p\mu + \gamma I - \mu R\end{aligned}\tag{11}$$

- Persamaan *Costate* Optimal

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial S} &= -\lambda_S \left(-\lambda I - \mu - \left(\min \left\{ \max \left(0, \frac{\lambda_S S}{2C_2} \right), 1 \right\} \right) \right) - \lambda_I (\lambda I) \\ \frac{\partial H}{\partial I} &= -C_1 + \lambda_S \lambda - \lambda_I (\lambda S - \gamma - \mu) - \lambda_R \gamma \\ \frac{\partial H}{\partial R} &= \lambda_R \mu\end{aligned}\tag{12}$$

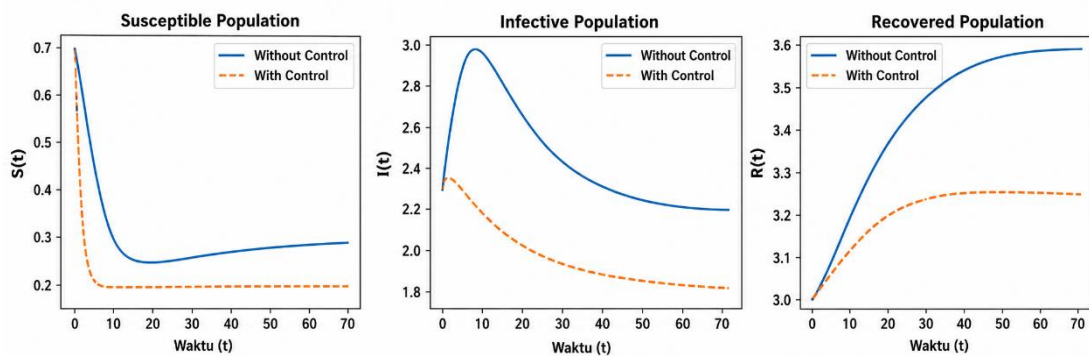
Persamaan (11) merupakan sistem *state* optimal yang menggambarkan dinamika populasi *susceptible* $S(t)$, *infected* $I(t)$, dan *recovered* $R(t)$ setelah diterapkannya kontrol optimal.

Perubahan masing-masing populasi dipengaruhi oleh laju penularan, kesembuhan, kematian alami, serta kontrol $u(t)$ yang bertujuan menekan penyebaran penyakit. Sementara itu, Persamaan (12) merupakan sistem *costate* yang diperoleh dari turunan Hamiltonian terhadap variabel *state*. Persamaan ini digunakan untuk menentukan sensitivitas fungsi objektif terhadap perubahan variabel *state* dan berperan dalam memperoleh kontrol optimal.

Persamaan *state* diselesaikan maju terhadap waktu dan *costate* diselesaikan mundur terhadap waktu, maka penyelesaian numerik yang dapat dilakukan yaitu menggunakan metode *Forward-Backward Sweep Runge-Kutta* orde empat [16]. Melalui simulasi penyelesaian numerik ini, dinamika penyebaran penyakit dan efektivitas imunisasinya dapat dievaluasi dalam skenario waktu nyata. Dalam penelitian ini, model SIR penyakit campak akan disimulasikan dalam dua kondisi yaitu sebelum dan sesudah penerapan kontrol imunisasi. Simulasi ini akan melibatkan beberapa parameter penting dalam model, yaitu laju kematian (μ), laju kelahiran (ρ), laju serangan infeksi (λ), laju kesembuhan individu terinfeksi (γ), dan proporsi populasi yang telah diimunisasi (p) dengan kondisi awal $S(0) = 0.7$, $I(0) = 0.3$, $R(0) = 0$. Berikut ditampilkan nilai parameter yang digunakan [12].

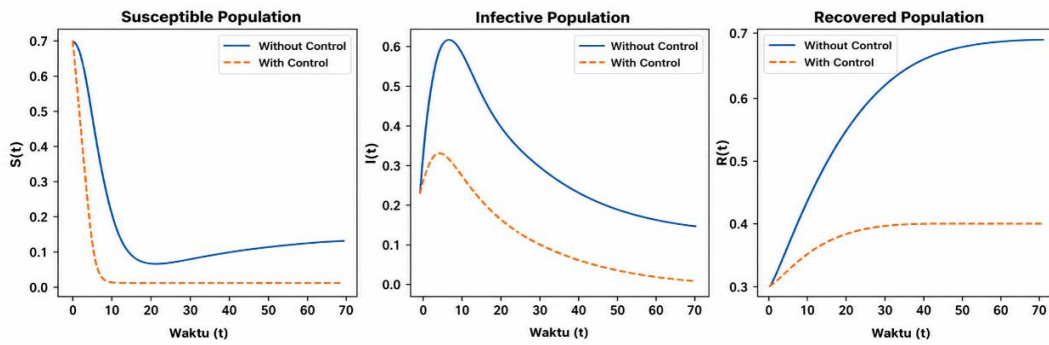
Tabel 1. Nilai Parameter

Parameter	Nilai
Laju kematian (μ)	0.02
Laju kelahiran (ρ)	0.02
Laju serangan infeksi (λ)	0.4
Laju kesembuhan individu terinfeksi (γ)	0.04
Proporsi populasi yang telah diimunisasi (p)	0.2, 0.4, 0.6, 0.8



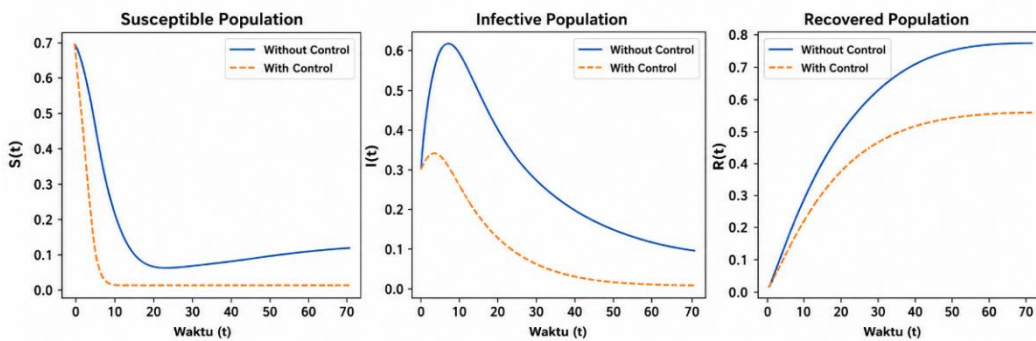
Gambar 3. Simulasi Model SIR dengan dan tanpa kontrol ($p = 0.2$)

Gambar 3 merupakan dinamika populasi dari model epidemi campak sebelum dan sesudah pemberian kontrol yang dibagi menjadi tiga kategori yaitu Susceptible (S), Infective (I), dan Recovered (R) dengan nilai parameter proporsi populasi yang telah diimunisasi $p = 0.2$. Gambar tersebut menunjukkan bahwa tanpa adanya kontrol, populasi rentan (S) menurun secara bertahap, sedangkan populasi terinfeksi (I) meningkat tajam sampai titik maksimum sebelum menurun secara perlahan. Populasi pulih (R) meningkat secara perlahan seiring waktu. Dengan kontrol, populasi rentan mengalami penurunan lebih cepat, lalu puncak populasi terinfeksi lebih rendah, dan populasi pulih meningkat lebih cepat.



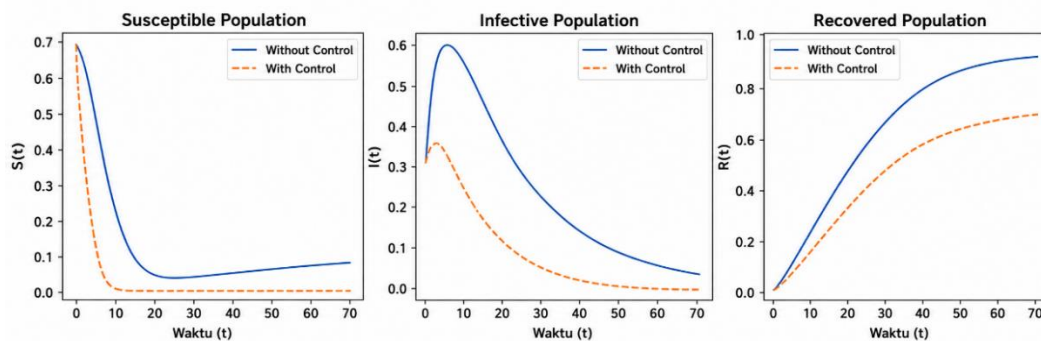
Gambar 4. Simulasi Model SIR dengan dan tanpa kontrol ($p = 0.4$)

Pada parameter $p = 0.4$, populasi rentan (S) tanpa kontrol menurun lebih lambat dibandingkan dengan kondisi yang menggunakan kontrol. Populasi terinfeksi (I) tanpa kontrol, mencapai puncak yang lebih tinggi, sedangkan dengan kontrol, puncak infeksi lebih rendah dan terjadi penurunan yang lebih cepat. Populasi pulih (R) juga mengalami peningkatan yang lebih cepat dalam kondisi dengan kontrol. Artinya kontrol dapat membantu mempercepat proses pemulihan.



Gambar 5. Simulasi Model SIR dengan dan Tanpa Kontrol ($p = 0.6$)

Untuk parameter $p = 0.6$, populasi rentan (S) menurun lebih lambat dan populasi terinfeksi (I) mencapai puncak tertinggi dalam keadaan tanpa kontrol, sementara populasi pulih (R) mengalami peningkatan secara perlahan. Dengan adanya kontrol, populasi rentan menurun jauh lebih cepat, puncak populasi terinfeksi lebih rendah, dan populasi pulih meningkat dengan cepat. Hal tersebut menandakan efektivitas kontrol dalam mengurangi penyebaran penyakit.



Gambar 6. Simulasi Model SIR dengan dan Tanpa Kontrol ($p = 0.8$)

Pada parameter $p = 0.8$, populasi rentan (S) menurun secara lambat ketika tanpa kontrol, sedangkan populasi terinfeksi (I) mencapai puncak tertinggi sebelum akhirnya menurun perlahan, dan populasi pulih meningkat secara perlahan. Dengan kontrol, populasi rentan menurun secara signifikan, lalu puncak infeksi jauh lebih rendah, dan populasi pulih meningkat dengan cepat. Hal ini menunjukkan bahwa pada nilai (p) yang tinggi, kontrol sangat efektif dalam mengendalikan penyebaran penyakit, mempercepat pemulihan, dan mengurangi jumlah individu yang rentan terhadap infeksi. Oleh sebab itu, jika dalam penelitian sebelumnya [12] hanya mengembangkan model SIR untuk penyakit campak dengan mempertimbangkan pengaruh imunisasi, namun tanpa melibatkan kontrol optimal yang berfokus pada analisis kestabilan sistem dan simulasi dinamika populasi berdasarkan parameter tetap dan hasilnya menunjukkan bahwa cakupan imunisasi sebesar 80% efektif menekan penyebaran penyakit, tetapi penelitian ini tidak memperhitungkan aspek biaya atau strategi intervensi yang dinamis. Sementara itu, penelitian ini berhasil memperluas model [12] dengan menerapkan kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin dengan menambahkan variabel kontrol. Penelitian ini tidak hanya meminimalkan jumlah infeksi tetapi juga meminimumkan biaya imunisasi. Simulasi numerik menunjukkan bahwa strategi kontrol optimal mampu mempercepat penurunan populasi rentan, mengurangi puncak infeksi, dan meningkatkan populasi pulih lebih signifikan dibandingkan model tanpa kontrol. Selain itu, penelitian ini memberikan rekomendasi praktis untuk program imunisasi yang lebih efisien dan berbasis data. Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya mengonfirmasi temuan Azizia tentang pentingnya imunisasi, tetapi juga melengkapinya dengan pendekatan optimasi yang lebih aplikatif dalam kebijakan kesehatan masyarakat.

IV. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian bisa disimpulkan bahwa penerapan kontrol optimal melalui imunisasi dengan memanfaatkan prinsip minimum pontryagin mengungkapkan bahwa strategi kontrol yang dilakukan tidak hanya mampu menekan laju infeksi secara signifikan, tetapi juga meminimalkan biaya imunisasi yang diperlukan. Salah satu faktor kunci dalam keberhasilan strategi ini adalah nilai (p), yang merepresentasikan proporsi populasi yang telah diimunisasi. Simulasi menunjukkan bahwa cakupan imunisasi yang rendah (p) menyebabkan peningkatan jumlah kasus infeksi yang tajam, penurunan jumlah individu rentan yang lambat, dan laju pemulihan populasi yang terhambat. Sebaliknya, cakupan imunisasi yang (p) tinggi menghasilkan penurunan signifikan pada populasi rentan, puncak kasus infeksi yang lebih rendah, serta peningkatan populasi pulih yang jauh lebih cepat, sehingga mendukung tercapainya kekebalan komunitas (*herd immunity*). Selain itu, strategi kontrol optimal yang diterapkan berhasil menyeimbangkan efisiensi biaya dan efektivitas imunisasi. Hal ini menunjukkan bahwa imunisasi yang dilakukan secara tepat sasaran tidak hanya efektif dalam mengurangi risiko infeksi pada individu, tetapi juga dapat mencegah wabah dalam skala populasi yang lebih luas. Saran untuk penelitian selanjutnya dapat mempertimbangkan kombinasi strategi control lain, seperti kampanye edukasi, pembatasan kontak, atau deteksi dini kasus, guna memperoleh strategi pengendalian yang lebih komprehensif dan optimal.

Daftar Pustaka

- [1] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, Profil Kesehatan Indonesia 2018. Jakarta, Indonesia: Kemenkes RI, 2019.
- [2] D. N. Zen and D. R. Ramdani, "Hubungan tingkat pengetahuan ibu tentang imunisasi campak dengan ketercapaian imunisasi campak di wilayah kerja Puskesmas Cipaku Kabupaten Ciamis tahun 2020," Jurnal Keperawatan Galuh, vol. 2, no. 2, pp. 53–60, 2020.

- [3] S. Astuti and N. Baety, “Hubungan dukungan keluarga terhadap kepatuhan dalam pemberian imunisasi campak pada bayi di wilayah kerja Puskesmas Mpunda Kota Bima tahun 2024,” *JKM-Bid*, vol. 11, no. 1, pp. 1–6, 2024.
- [4] N. Febriastuti, “Kepatuhan orang tua dalam pemberian kelengkapan imunisasi dasar pada bayi 4–11 bulan,” *Procedia Manuf.*, vol. 1, no. 22, pp. 1–17, 2014.
- [5] M. P. A. Gastanaduy et al., “Measles,” *Centers for Disease Control and Prevention*, [Online]. Available: <https://www.cdc.gov/surv-manual/php/table-of-contents/chapter-7-measles.html>. [Accessed: 21-Feb-2026].
- [6] World Health Organization, *Measles and Rubella Strategic Framework 2021–2030*. Geneva, Switzerland: WHO, 2024. [Online]. Available: <https://www.who.int/publications/i/item/measles-and-rubella-strategic-framework-2021-2030>. [Accessed: 21-Feb-2026].
- [7] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, *Profil Kesehatan Indonesia 2023*. Jakarta, Indonesia: Kemenkes RI, 2024.
- [8] W. D. Sihotang, C. C. Simbolon, J. Hartiny, D. Tindaon, and L. P. Sinaga, “Analisis kestabilan model SEIR penyebaran penyakit campak dengan pengaruh imunisasi dan vaksin MR,” *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, vol. 16, no. 1, p. 107, 2019, doi: 10.20956/jmsk.v16i1.6594.
- [9] L. Hakim, “Strategi kontrol optimal model SIQR pada penyebaran penyakit campak,” *Leibniz Journal of Mathematics*, vol. 2, no. 2, pp. 65–76, 2022, doi: 10.59632/leibniz.v2i2.177.
- [10] D. Suandi, “Analisis dinamik pada model penyebaran penyakit campak dengan pengaruh vaksin permanen,” *Kubik: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, vol. 2, no. 2, pp. 1–10, 2017, doi: 10.15575/kubik.v2i2.1854.
- [11] A. M. Rohmah, S. A. Rohmaniah, and R. A. K. Saputra, “Model kontrol optimal SIR pada penyakit campak,” *Unisda Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 8, no. 1, pp. 67–74, 2022, doi: 10.52166/ujmc.v8i1.3226.
- [12] A. N. Aziziah and Abadi, “Model SIR pada epidemi penyakit campak berdasarkan umur dengan pengaruh imunisasi,” *Jurnal Ilmiah Matematika*, vol. 3, no. 6, pp. 52–57, 2017.
- [13] F. Brauer, C. C. Chavez, and Z. Feng, *Mathematical Models in Epidemiology and Immunology*. 2019. doi: 10.14708/ma.v28i42/01.1879.
- [14] D. S. Naidu, *Optimal Control Systems*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2002, doi: 10.1515/9783110789737-005.
- [15] Subiono, *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Surabaya, Indonesia: ITS Press, 2013.
- [16] S. Lenhart and J. T. Workman, *Optimal Control Applied to Biological Models*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2007, doi: 10.1201/9781420011418.