

ANALISIS DINAMIK MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH *DENGUE* (DBD) DENGAN PENGARUH TERAPI

Yesinta Kharisma Ningtias^{1§}, M. Nur Haqqul Qomarudin², Rachmadania Akbarita³, Rizka Rizqy Robby⁴

¹Universitas Nahdlatul Ulama Blitar [Email: yesintakharisma0@gmail.com]

²Universitas Nahdlatul Ulama Blitar [Email: haqquludin@gmail.com]

³Universitas Nahdlatul Ulama Blitar [Email: дания.барита@gmail.com]

⁴Universitas Nahdlatul Ulama Blitar [Email: rizka.ertiga@gmail.com]

§Corresponding Author

ABSTRACT

Dengue Hemorrhagic Fever (DHF) is a viral infectious disease transmitted through the bite of the Aedes aegypti mosquito. This study analyzes the equilibrium effect of therapy in controlling the spread of DHF. A mathematical modeling approach is used to predict the dynamics of the spread of DHF by considering the intervention of therapy use. This model describes the interaction between human population and the effectiveness of therapy. The results of the analysis with a disease-free equilibrium point $\left(\frac{\rho}{\mu + \alpha}, \frac{\alpha\rho}{(\mu - \sigma)(\mu + \alpha)}, 0, \frac{\sigma\alpha\rho}{(\mu - \sigma)(\mu + \alpha)\mu}\right)$. While the endemic equilibrium point is (S^, V^*, I^*, R^*) with $R_0 = \frac{\beta\rho + \theta N(\mu + \alpha)}{N(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}$. Stability is achieved when the eigenvalue is less than zero. Disease-free stability is said to be stable when the value of $R_0 < 1$ and endemic stability is said to be stable when the value of $R_0 > 1$. The results of the traveling wave in the model have a minimum speed with $R_0 > 1$. In this case, with the existence of this minimum speed, the wave of spread in the future can occur again needs to be watched out for properly. By carrying out therapy, it is hoped that it can help infected individuals.*

Keywords: Dengue Hemorrhagic Fever, Therapy, Basic Reproduction Number, Traveling Wave.

1. PENDAHULUAN

Demam Berdarah *Dengue* (DBD) merupakan salah satu penyakit menular yang menjadi masalah serius di negara-negara beriklim tropis, termasuk Indonesia. Penyakit ini disebabkan oleh virus *Dengue* yang ditularkan melalui gigitan nyamuk *Aedes aegypti*. Iklim tropis dan kelembapan tinggi di Indonesia menjadikan wilayah ini sebagai lingkungan yang ideal untuk perkembangan vektor penyakit tersebut. Akibatnya, Indonesia termasuk salah satu negara dengan jumlah kasus DBD tertinggi di Asia Tenggara, bahkan dunia. Data dari Kementerian Kesehatan menunjukkan bahwa pada tahun 2022 terdapat lebih dari 76.000 kasus DBD dengan angka kematian yang cukup tinggi, menandakan bahwa penyakit ini masih menjadi ancaman nyata bagi kesehatan masyarakat.

DBD tidak hanya berdampak pada kesehatan individu, tetapi juga menimbulkan beban ekonomi akibat tingginya biaya perawatan dan hilangnya produktivitas. Virus

Dengue sendiri terdiri dari empat serotipe berbeda (DEN-1 hingga DEN-4), dan infeksi berulang oleh serotipe berbeda dapat meningkatkan risiko terjadinya DBD berat, bahkan kematian. Hingga kini, vaksin yang tersedia belum sepenuhnya efektif dan aman dalam menangani semua serotipe virus tersebut. Oleh karena itu, pengembangan metode pengobatan alternatif, seperti terapi herbal, menjadi perhatian dalam upaya mengendalikan penyebaran DBD.

Di sisi lain, pendekatan matematis melalui pemodelan sangat penting untuk memahami dinamika penyebaran penyakit menular seperti DBD. Salah satu model yang digunakan adalah model SVIR (Susceptible, Vaccinated, Infected, Recovered), yang membagi populasi ke dalam empat kategori berdasarkan status infeksi. Model ini memungkinkan analisis mendalam terhadap pengaruh vaksinasi, infeksi, dan pemulihan terhadap dinamika populasi yang

terpapar DBD. Dengan menambahkan parameter terapi herbal ke dalam model, diharapkan diperoleh gambaran yang lebih akurat mengenai efektivitas intervensi ini dalam menekan laju penyebaran penyakit.

Selain analisis kestabilan, konsep *travelling wave* dalam pemodelan matematika juga digunakan untuk menggambarkan penyebaran infeksi dari satu lokasi ke lokasi lain. Hal ini penting mengingat mobilitas individu dan persebaran spasial penyakit tidak selalu terjadi secara merata, melainkan dalam pola gelombang. Dengan pendekatan ini, penelitian dapat mengidentifikasi kecepatan minimum penyebaran infeksi serta strategi intervensi yang lebih efisien.

Penelitian ini merupakan pengembangan dari studi sebelumnya yang dilakukan oleh Nita Putri Utami (2022) mengenai pengaruh vaksinasi terhadap penyebaran DBD, serta oleh Intan Juliyah (2016) mengenai pengaruh terapi herbal. Dengan mengintegrasikan parameter terapi ke dalam model SVIR dan menganalisis fenomena *travelling wave*, penelitian ini bertujuan untuk memberikan kontribusi ilmiah yang signifikan dalam pengendalian DBD secara lebih komprehensif.

2. METODE PENELITIAN

Pada bab ini, menjelaskan terkait dengan metodologi yang akan digunakan dalam menyelesaikan model sistem dinamik dengan mengembangkan serta memodelkan penyebaran penyakit demam berdarah. Pemodelan kali ini dengan mengintegrasikan beberapa faktor yang dapat mempengaruhi penularan atau berkembangnya penyakit melalui virus *dengue*, termasuk populasi manusia, keadaan manusia, infeksi manusia, dan kesehatan manusia (Bano, 2018). Pendekatan yang dilakukan ini, merupakan sistem dinamik yang diperuntuk menganalisis perubahan jumlah individu yang sudah terpapar virus, serta bagaimana dampak yang ditimbulkan dari virus jika mendapat vaksinasi serta terapi. Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis untuk menyelesaikan penulisan ini (Juli, 2023), yaitu :

1. Mengidentifikasi variabel dan parameter pada model penyebaran Demam Berdarah *Dengue* (DBD).
2. Menetapkan asumsi yang digunakan dalam model penyebaran Demam Berdarah *Dengue* (DBD).

3. Memodifikasi model matematika penyebaran Demam Berdarah *Dengue* (DBD) dengan menambah parameter pada model penyebaran Demam Berdarah *Dengue* (DBD).
4. Mencari titik equilibrium model penyebaran Demam Berdarah *Dengue* (DBD).
5. Analisis kestabilan titik equilibrium model penyebaran Demam Berdarah *Dengue* (DBD).
6. Analisis *travelling wave* model penyebaran Demam Berdarah *Dengue* (DBD).
7. Mencari nilai dengan menggunakan model Runge Kutta.
8. Menentukan grafik dengan bantuan Matlab.
9. Menarik kesimpulan model penyebaran Demam Berdarah *Dengue* (DBD).

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Model Matematika Penyebaran Penyakit DBD dengan Pengaruh Terapi

Model yang dibahas pada penelitian ini adalah model penyebaran penyakit DBD yang diberikan oleh (Utami, 2022). Model tersebut terbentuk atas empat subpopulasi dengan menggunakan model SVIR. Variabel pembentukan model yaitu S yang menyatakan individu yang sehat (belum terinfeksi) tapi rentan untuk terinfeksi. V menyatakan individu yang mengalami vaksinasi. I menyatakan individu yang sudah terinfeksi dan dapat menyebarkan penyakit ke individu yang rentan. R menyatakan individu yang telah sembuh dan kebal dari infeksi t menyatakan waktu.

Parameter yang digunakan dalam pembentukan model ini adalah μ menyatakan Tingkat kematian dan ρ menyatakan Tingkat kelahiran dari populasi manusia. β menyatakan tingkat penyebaran demam berdarah *dengue* (DBD). γ menyatakan tingkat kesembuhan individu yang telah terinfeksi (peluang perpindahan dari I ke R). α menyatakan peluang individu yang rentan terinfeksi mengalami vaksinasi. θ menyatakan peluang individu yang mengalami vaksinasi tetapi memiliki kemungkinan terinfeksi. σ menyatakan peluang individu yang mengalami vaksinasi dan memperoleh kekebalan. δ menyatakan peluang individu yang sudah diterapi.

Dalam hal ini sistem persamaan diferensial yang menjelaskan mengenai penyakit DBD dengan pengaruh terapi diberikan sebagai berikut

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \rho - \mu S - \beta S \frac{I}{N} - \alpha S \\ \frac{dV}{dt} &= \alpha S - \theta I - \mu V - \sigma V \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} + \theta I - \mu I - \gamma I - \delta I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \sigma V + \delta I - \mu R \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

3.2 Analisis Kestabilan Pada Model

Berdasarkan (Utami,2022) pada model 1 dengan menggunakan Matriks Degenerasi dapat diperoleh nilai bilangan reproduksi dasar yaitu $R_0 = \frac{\beta \rho + \theta N(\mu + \alpha)}{N(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}$. Selanjutnya analisis kestabilan pada model 1 dimulai dengan memberikan $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dC}{dt} = \frac{dK}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$ sedemikian hingga diperoleh dua titik kestabilan pada model (1) yaitu titik kestabilan bebas penyakit yaitu $E_0 \left(\frac{R_0 \rho N(\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N(\mu + \alpha)}, \frac{\alpha \rho}{(\mu - \sigma)(\mu + \alpha)}, 0, \frac{\sigma \alpha \rho}{(\mu - \sigma)(\mu + \alpha)\mu} \right)$ dan titik kesetimbangan endemik yakni $E_e \left(\frac{(-\theta + \mu + \gamma + \delta)\rho}{(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]}, \frac{\alpha \rho}{R_0(\mu + \alpha)^2} + \frac{\theta R_0 N}{\beta}, \frac{R_0 N(\mu + \alpha)}{\beta} - \mu + \alpha, \frac{1}{\mu} \left(\frac{R_0 N[(\gamma + \delta)(\mu + \alpha) + \sigma \theta]}{\beta} + \frac{\sigma \alpha \rho}{R_0(\mu + \alpha)^2} \right) \right)$. Dalam hal ini Model matematika penyebaran penyakit DBD dengan pengaruh terapi pada (1) merupakan sistem persamaan differensial tak linear. Sehingga untuk melakukan pengamatan mengenai kestabilan pada model perlu dilakukan linearisasi pada (1). Seperti yang dijelaskan pada (Rinaldi, 2021), linearisasi pada model tersebut menggunakan matriks Jacobian yaitu

$$J(E) = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial S} & \frac{\partial S}{\partial V} & \frac{\partial S}{\partial I} & \frac{\partial S}{\partial R} \\ \frac{\partial V}{\partial S} & \frac{\partial V}{\partial V} & \frac{\partial V}{\partial I} & \frac{\partial V}{\partial R} \\ \frac{\partial I}{\partial S} & \frac{\partial I}{\partial V} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial R} \\ \frac{\partial R}{\partial S} & \frac{\partial R}{\partial V} & \frac{\partial R}{\partial I} & \frac{\partial R}{\partial R} \end{pmatrix}$$

Simbol E merupakan titik tetap yang diperoleh dari (1). Oleh karena itu dapat diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut:

$$J(E) = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\beta I}{N} - \alpha & 0 & -\frac{\beta S}{N} & 0 \\ \alpha & -\mu - \alpha & -\theta & 0 \\ \frac{\beta I}{N} & 0 & \frac{\beta S}{N} + \theta - \mu - \gamma - \delta & 0 \\ 0 & \sigma & \gamma + \delta & -\mu \end{pmatrix} \quad (2)$$

Sedemikian hingga jika diberikan $E_0(S, V, I, R) =$

$E_0 \left(\frac{R_0 \rho N(\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N(\mu + \alpha)}, \frac{\alpha \rho}{(\mu - \sigma)(\mu + \alpha)}, 0, \frac{\sigma \alpha \rho}{(\mu - \sigma)(\mu + \alpha)\mu} \right)$ maka dapat diperoleh matriks Jacobi untuk titik tetap bebas penyakit yaitu

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu - \alpha & 0 & -\frac{R_0 \rho \beta(\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N(\mu + \alpha)} & 0 \\ \alpha & -\mu - \alpha & -\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_0 \rho \beta(\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N(\mu + \alpha)} + \theta - \mu - \gamma - \delta & 0 \\ 0 & \sigma & \gamma + \delta & -\mu \end{pmatrix} \quad (3)$$

Selanjutnya untuk melakukan analisis kestabilan pada titik tetap pada (3), maka akan dicari nilai eigen berdasarkan (4) yaitu $\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$ sedemikian hingga dapat diperoleh

$$\det \begin{pmatrix} -\mu - \alpha - \lambda & 0 & -\frac{R_0 \rho \beta(\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N(\mu + \alpha)} & 0 \\ \alpha & -\mu - \alpha - \lambda & -\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_0 \rho \beta(\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N(\mu + \alpha)} + \theta - \mu - \gamma - \delta - \lambda & 0 \\ 0 & \sigma & \gamma + \delta & -\mu - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

Perhitungan pada (4) menghasilkan persamaan sebagai berikut

$$(-\mu - \alpha - \lambda)(-\mu - \alpha - \lambda) \left(\frac{R_0 \rho \beta(\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N(\mu + \alpha)} + \theta - \mu - \gamma - \delta - \lambda \right) (-\mu - \lambda) = 0 \quad (5)$$

Dalam hal ini dapat diperoleh nilai eigen yaitu $\lambda_{1,2} = -(\mu + \alpha)$, $\lambda_3 = \lambda_3 = -\mu$, $\lambda_4 = \frac{R_0 \rho \beta(\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N(\mu + \alpha)} + \theta - \mu - \gamma - \delta$, berlaku $\lambda_{1,2,3} < 0$ dengan $\mu, \alpha > 0$. Selanjutnya jika diberikan $R_0 < 1$ maka jelas bahwa $\lambda_4 < 0$ sedemikian hingga dapat dibentuk teorema sebagai berikut

Teorema 3.1

Titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 \left(\frac{R_0 \rho N(\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N(\mu + \alpha)}, \frac{\alpha \rho}{(\mu - \sigma)(\mu + \alpha)}, 0, \frac{\sigma \alpha \rho}{(\mu - \sigma)(\mu + \alpha)\mu} \right)$ pada model SVIR pada penyebaran penyakit DBD dengan pengaruh terapi pada persamaan (5) bersifat stabil jika berlaku $R_0 < 1$.

Analisis kestabilan pada titik kesetimbangan bebas penyakit berdasarkan teorema 1 berada pada kondisi stabil jika berlaku $R_0 < 1$ dengan R_0 merupakan ukuran potensi penyebaran penyakit yang berupa rata-rata tingkat penularan dibandingkan dengan rata-rata lainnya. Karena $R_0 < 1$ maka dapat diamati bahwa pada kondisi stabil rata-rata tingkat penularan penyakit lebih sedikit dari pada rata-rata lainnya sedemikian hingga diperoleh individu yang terinfeksi pada populasi lebih sedikit daripada individu lainnya. Seiring berjalannya waktu karena $R_0 < 1$ maka penularan penyakit akan semakin sedikit dan lama-lama akan menghilang dari populasi.

Pada titik yang kedua yaitu titik kesetimbangan endemik $E_e(S^*, V^*, I^*, R^*) = \left(\frac{(-\theta + \mu + \gamma + \delta)\rho}{(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]}, \frac{\alpha \rho}{R_0(\mu + \alpha)^2} + \frac{\theta R_0 N}{\beta}, \frac{R_0 N(\mu + \alpha)}{\beta} - \mu + \alpha, \frac{1}{\mu} \left(\frac{R_0 N[(\gamma + \delta)(\mu + \alpha) + \sigma \theta]}{\beta} + \frac{\sigma \alpha \rho}{R_0(\mu + \alpha)^2} \right) \right)$, dengan menggunakan cara yang sama berdasarkan persamaan (2) maka dapat diperoleh matriks Jacobi pada berdasarkan titik

tetap tersebut sebagai berikut

$$= \begin{bmatrix} -\mu - \alpha - R_0(\mu + \alpha) + \frac{\beta(\mu - \alpha)}{N} & 0 & \frac{-\beta\rho(\mu + \gamma + \delta - \theta)}{N(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]} & 0 \\ \alpha & -\mu - \alpha & -\theta & 0 \\ R_0(\mu + \alpha) + \frac{\beta(\mu - \alpha)}{N} & 0 & \frac{\beta\rho(\mu + \gamma + \delta - \theta)}{N(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]} + \theta - \mu - \gamma - \delta & 0 \\ 0 & \sigma & \gamma + \delta & -\mu \end{bmatrix}$$

Selanjutnya perhitungan untuk mencari nilai eigen pada (6) juga dilakukan dengan menggunakan $\det(J(E_e) - \lambda I) = 0$ sehingga

$$\det \begin{bmatrix} -\mu - \alpha - R_0(\mu + \alpha) + \frac{\beta(\mu - \alpha)}{N} - \lambda & 0 & \frac{-\beta\rho(\mu + \gamma + \delta - \theta)}{N(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]} \\ \alpha & -\mu - \alpha - \lambda & -\theta \\ R_0(\mu + \alpha) + \frac{\beta(\mu - \alpha)}{N} & 0 & \frac{\beta\rho(\mu + \gamma + \delta - \theta)}{N(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]} + \theta - \mu - \gamma - \delta - \lambda \\ 0 & \sigma & \gamma + \delta \end{bmatrix} = 0$$

dengan dimisalkan:

$$\det \begin{bmatrix} b_1 - \lambda & 0 & b_6 & 0 \\ b_2 & b_4 - \lambda & b_7 & 0 \\ b_3 & 0 & b_8 - \lambda & 0 \\ 0 & b_5 & b_9 & b_{10} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Maka dapat diperoleh

$$(b_{10} - \lambda)(b_4 - \lambda)[(b_8 - \lambda)(b_1 - \lambda) + b_3b_6] = 0 \quad (8)$$

Dalam hal ini nilai eigen yang diperoleh yaitu $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -(\mu + \alpha)$ berlaku $\lambda_{1,2} < 0$ dengan $\mu, \alpha > 0$ dan

$$\lambda^2 - (b_1b_8)\lambda + (b_1b_8 + b_3b_6) = 0 \quad (9)$$

Untuk $R_0 = \frac{\beta\rho + \theta N(\mu + \alpha)}{N(\mu + \alpha)(\mu + \gamma + \delta)}$ sedemikian hingga (9), maka nilai eigen yang diperoleh yaitu $\lambda_3 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ dan $\lambda_4 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$. Selanjutnya untuk melakukan pengamatan pada kestabilan pada nilai eigen $\lambda_{3,4}$ maka terdapat beberapa kemungkinan sebagai berikut

Pada kasus pertama, diambil kondisi $b^2 - 4c \geq 0$ dengan $b > 0$ dan $c > 0$ sehingga diperoleh $R_0 > 1$. Maka dapat diturunkan ketidaksamaan berikut :

$$R_0 \geq 2\sqrt{\frac{\delta + \gamma + \mu - \theta}{(\mu + \alpha)^2(\delta + \gamma + \mu)}} \left[(\mu + \alpha)(\delta + \gamma + \mu - \theta) - \frac{\beta\rho}{N} \right] \quad (10)$$

Selanjutnya, pada kondisi kedua, diambil kondisi $b^2 - 4c < 0$ dengan $b > 0$ dan $c > 0$, dalam hal ini pengamatan terhadap kestabilan sistem masih dapat dilakukan. Berdasarkan persamaan (10) diperoleh $0 < R_0 <$

$$2\sqrt{\frac{\delta + \gamma + \mu - \theta}{(\mu + \alpha)^2(\delta + \gamma + \mu)}} \left[(\mu + \alpha)(\delta + \gamma + \mu - \theta) - \frac{\beta\rho}{N} \right].$$

Karena telah diketahui bahwa $b > 0$ dan $c > 0$ sehingga diperoleh $R_0 > 1$. Dengan demikian dapat dirumuskan suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.2

Titik kesetimbangan endemik $E_e(S^*, V^*, I^*, R^*)$ pada model SVIR pada penyebaran penyakit

DBD dengan pengaruh terapi dari (1) akan stabil jika berlaku $R_0 > 1$.

Dalam hal ini R_0 merupakan ukuran potensi penyebaran penyakit yang berupa rata-rata tingkat penularan penyakit pada suatu populasi. Karena $R_0 > 1$ maka dapat diamati bahwa pada kondisi stabil rata-rata tingkat penularan penyakit lebih banyak dari pada rata-rata lainnya. Dengan kata lain seiring berjalannya waktu karena $R_0 > 1$ maka penularan penyakit DBD akan tetap ada dan tidak menghilang dari populasi.

3.3 Travelling wave pada Model Penyebaran Penyakit DBD dengan Pengaruh Terapi

Model penyebaran penyakit DBD yang mempertimbangkan pengaruh terapi, sebagaimana ditunjukkan dalam (1), menggunakan populasi dari suatu wilayah tertentu. Pada model ini, ditambahkan asumsi adanya individu sembuh yang berasal dari wilayah lain yang bergabung ke dalam populasi tersebut. Diasumsikan pula bahwa tidak terjadi perpindahan keluar dari populasi ini. Namun, dalam kenyataannya, di dalam wilayah tersebut individu tetap melakukan pergerakan mengikuti jalur yang sudah ada, yang menyebabkan kemungkinan terjadinya transmisi virus dari satu lokasi ke lokasi lain dalam area tersebut. Dengan adanya mobilitas ini, maka potensi munculnya *travelling wave* atau gelombang penyebaran penyakit di masa mendatang menjadi mungkin. Berdasarkan Juliyah (2016), dalam model ini didefinisikan fluks populasi pada masing-masing kompartemen dengan persamaan:

$$\mathcal{F} = -D_I \frac{\partial I}{\partial x} \quad (11)$$

di mana $I(x, t)$ adalah subpopulasi yang terinfeksi kronis, dan D_I adalah koefisien difusivitas konstan. Persamaan yang berlaku selanjutnya adalah:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = -\frac{\partial (-D_I \frac{\partial I}{\partial x})}{\partial x} \quad (12)$$

yang kemudian disederhanakan menjadi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \quad (13)$$

Selanjutnya, dilakukan rekonstruksi model pada (1) dengan fokus pada kelas yang dominan dalam penyebaran virus, sehingga diperoleh:

$$\frac{dI}{dt} = D_I \frac{d^2 I}{dx^2} + \beta S \frac{I}{N} + \theta I - \mu I - \gamma I - \delta I \quad (14)$$

dengan D_I sebagai koefisien difusivitas masing-masing kelas. Menurut Hariyanto dalam Qomarudin dkk (2020), solusi dari (14) berbentuk $I(x, t) = I(x - vt)$, dengan v sebagai kecepatan gelombang transmisi virus.

Dengan mendefinisikan $I(u)$ dimana Menurut Hariyanto (2014), solusi dari (14) berbentuk $I(x, t) = I(x - vt)$, $u = x - vt$, persamaan tersebut menjadi:

$$-c \frac{\partial I}{\partial u} = D_I \frac{\partial^2 I}{\partial u^2} + \beta S \frac{I}{N} + \theta I - \mu I - \gamma I - \delta I \quad (15)$$

dengan syarat batas $\frac{\partial I(0)}{\partial t} = \frac{\partial I(L)}{\partial t} = 0$ dengan $x \in (0, L)$. Persamaan (15) membentuk sistem *travelling wave* yang kemudian dilinearisasi di sekitar titik tetap bebas penyakit dan endemik untuk mengamati kecepatan minimal terjadinya gelombang penyebaran.

3.3.1 Travelling wave di Titik Tetap E_0

Dengan melakukan linearisasi di titik tetap E_0 , diperoleh:

$$-c \frac{\partial I}{\partial u} = D_I \frac{\partial^2 I}{\partial u^2} + \beta S \frac{I}{N} + \theta I - \mu I - \gamma I - \delta I \quad (16)$$

Penyelesaian umumnya diasumsikan berbentuk $(I) = (j_1 e^{\psi u})$ dengan $j_i \neq 0$ konstan. Sehingga didapatkan:

$$-c j_1 \psi e^{\psi u} = D_I j_1 \psi^2 e^{\psi u} + \left(\frac{R_0 \rho \beta (\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N (\mu + \alpha)} + \theta - \mu - \gamma - \delta \right) j_1 e^{\psi u} \quad (17)$$

Yang dapat disederhanakan menjadi:

$$H_1(\psi) = D_I j_1 \psi^2 + c j_1 \psi + \left(\frac{R_0 \rho \beta (\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N (\mu + \alpha)} + \theta - \mu - \gamma - \delta \right) j_1 = 0 \quad (18)$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (18) maka dapat diperoleh titik kritis pada H_1 dimana dengan memberikan $\frac{dH_1}{d\psi} = 0$ sedemikian hingga untuk H_1 diperoleh $\psi = -\frac{c}{2D_I} < 0$. Dalam hal ini jika substitusi dilakukan untuk masing-masing nilai ψ pada (18) maka diperoleh

$$j_1 \frac{c^2}{4D_I} - j_1 \frac{c^2}{2D_I} + \left(\frac{R_0 \rho \beta (\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N (\mu + \alpha)} + \theta - \mu - \gamma - \delta \right) j_1 = 0 \quad (19)$$

Sedemikian hingga dapat diperoleh kecepatan minimal dari kompartemen I yaitu $c_{I_1} = \sqrt{2D_I \left(\frac{R_0 \rho \beta (\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N (\mu + \alpha)} + \theta - \mu - \gamma - \delta \right)}$, oleh karena itu $R_0 > 1$ agar c_I ada yang menunjukkan kondisi gelombang penyebaran DBD dapat terjadi kembali. Kondisi ini mengalami kontradiksi dengan kestabilan bebas penyakit.

3.3.2 Travelling wave di Titik Tetap E_e

Pada titik tetap E_e analisis eksistensi *travelling wave* juga dilakukan dengan cara yang sama seperti pada subbab 3.3.1. Dengan menggunakan titik tetap E_e akan menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$-c \frac{\partial I}{\partial u} = D_I \frac{\partial^2 I}{\partial u^2} + \left(\frac{(-\theta + \mu + \gamma + \delta)\rho}{(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]} \right) S + \left(\beta \frac{(-\theta + \mu + \gamma + \delta)\rho}{(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]N} + \theta - \mu - \gamma - \delta \right) I \quad (20)$$

Dalam hal ini $\left(\frac{(-\theta + \mu + \gamma + \delta)\rho}{(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]} \right) S$ menyatakan sejumlah individu rentan yang memasuki kelas terinfeksi sedemikian hingga dapat dinyatakan bahwa $\left(\frac{(-\theta + \mu + \gamma + \delta)\rho}{(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]} \right) S = \kappa I$ yang menyatakan bertambahnya sejumlah individu terinfeksi akibat adanya individu rentan yang telah dinyatakan terinfeksi. Oleh karena itu, persamaan (15) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$-c \frac{\partial I}{\partial u} = D_I \frac{\partial^2 I}{\partial u^2} + \left[\kappa + \beta \frac{(-\theta + \mu + \gamma + \delta)\rho}{(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]N} + \theta - \mu - \gamma - \delta \right] I \quad (21)$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada subbab sebelumnya, jika diambil penyelesaian umum dari (21) adalah $I = k_1 e^{\psi u}$ pada titik tetap E_e sedemikian hingga diperoleh $G_1(\psi) = D_I k_1 \psi^2 + c k_1 \psi + \left[\kappa + \beta \frac{(-\theta + \mu + \gamma + \delta)\rho}{(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]N} + \theta - \mu - \gamma - \delta \right] k_1 = 0$ (22)

Dalam hal ini dengan memberikan $\frac{dG_1}{d\psi} = 0$ pada (21) sedemikian hingga untuk G_1 diperoleh $\psi = -\frac{c}{2D_I}$ berlaku $\psi < 0$. Selanjutnya jika ψ pada G_1 pada (22) maka diperoleh $k_1 \frac{c^2}{4D_I} - k_1 \frac{c^2}{2D_I} + \left[\kappa + \beta \frac{(-\theta + \mu + \gamma + \delta)\rho}{(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]N} + \theta - \mu - \gamma - \delta \right] k_1 = 0$ (23)

Sedemikian hingga dapat diperoleh kecepatan minimal dari kompartemen I yaitu $c_{I_2} = \sqrt{2D_I \left[\kappa + \beta \frac{(-\theta + \mu + \gamma + \delta)\rho}{(\mu + \alpha)[R_0(\mu + \gamma + \delta) - \theta]N} + \theta - \mu - \gamma - \delta \right]}$ pada titik tetap E_e , oleh karena itu $R_0 > 1$ agar c_I ada yang menunjukkan kondisi gelombang penyebaran DBD bisa terjadi kembali di masa mendatang.

Teorema 3.3

Travelling wave pada kondisi bebas penyakit dan endemik model SVIR pada penyebaran penyakit DBD dengan pengaruh terapi dari persamaan (15) akan terjadi gelombang penyebaran DBD dengan kecepatan minimal pada c_{I_1} dan c_{I_2} untuk $R_0 > 1$.

3.4 Analisis Sensitivitas

Nilai parameter yang diimplementasikan pada model persamaan (1) melibatkan nilai parameter yang merupakan hasil dari penelitian terdahulu pada kasus DBD. Nilai parameter lengkap yang diimplementasikan dalam penelitian ini ditampilkan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Nilai Parameter

Simbol	Nilai	Sumber
ρ	0.2	(Utami, 2022)
σ	0.7	(Utami, 2022)
β	0.5	(Utami, 2022)
θ	0.3	(Utami, 2022)
μ	0.2	(Utami, 2022)
δ	0.8	Asumsi
γ	0.06	(Utami, 2022)
α	0.8	(Utami, 2022)

Dengan mengacu pada nilai parameter pada Tabel 1, penelitian ini memperoleh estimasi bilangan reproduksi dasar sebesar $R_0 \approx 1,29032$ dan untuk parameter dalam tabel berikut:

Tabel 2. Indeks Sensitivitas

Simbol	Nilai
ρ	0.25
β	0.625
θ	0.375
μ	-0.603
δ	-0.191
γ	-0.16
α	-0.05

Dengan mengacu pada persamaan (1) dan nilai parameter pada Tabel 1, maka dihasilkan indeks sensitivitas masing-masing parameter pada bilangan reproduksi dasar R_0 , yang disajikan pada Tabel 2. Sebagai contoh, indeks sensitivitas R_0 terhadap parameter β dan δ adalah

$$\begin{aligned}
 S_{\beta}^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \beta} \cdot \frac{\beta}{R_0} \\
 &= \frac{\beta}{N(\mu+\alpha)(\mu+\gamma+\delta)} \cdot \frac{\rho}{R_0} \\
 &= \frac{\beta \rho}{\beta \rho + \theta N(\mu+\alpha)} \\
 &= 0,625
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{\delta}^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \delta} \cdot \frac{\delta}{R_0} \\
 &= -\frac{\beta \rho + \theta N(\mu+\alpha)}{(N(\mu+\alpha)(\mu+\gamma+\delta))^2} (N(\mu+\alpha)) \cdot \frac{\rho}{R_0} \\
 &= -\frac{\delta}{\mu+\gamma+\delta} \\
 &= -0,191
 \end{aligned}$$

Indeks sensitivitas pada Tabel 2 menunjukkan parameter dengan sensitivitas. Secara umum, ada parameter yang paling berpengaruh terhadap perubahan angka reproduksi dasar yaitu parameter tersebut meliputi laju individu terinfeksi (β) memiliki indeks sensitivitas positif. Parameter dengan indeks sensitivitas positif menunjukkan signifikansi positif dalam peningkatan angka

reproduksi dasar. Dengan demikian, pengendalian terhadap angka reproduksi dasar dapat difokuskan pada upaya menurunkan laju penularan (β) dengan salah satunya meningkatkan laju terapi (δ) sebagai strategi utama dalam menekan penyebaran penyakit.

3.5 Simulasi Numerik

Pada sub bab ini akan dibahas simulasi numerik dari model penyebaran penyakit DBD (1) dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde-4. Tujuan simulasi numerik ini adalah untuk memudahkan dalam memahami tingkah laku model penyebaran penyakit DBD. Perhitungan simulasi tersebut diambil dengan menggunakan nilai-nilai parameter yang berasal dari beberapa sumber ataupun dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu.

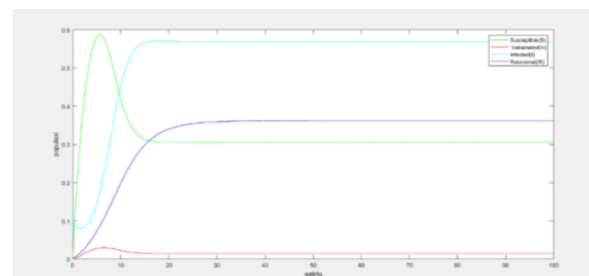
3.5.1 Simulasi pada Sistem Tidak Stabil

Simulasi numerik pada kondisi tidak stabil akan dilakukan dengan mensubstitusikan nilai-nilai parameter. Nilai parameter yang digunakan pada numerik ini adalah sebagai berikut:

Tabel 3. Nilai Parameter Kondisi Tidak Stabil

Simbol	Nilai	Sumber
ρ	0.25	Asumsi
σ	0.7	(Utami, 2022)
β	0.5	(Utami, 2022)
θ	0.3	(Utami, 2022)
μ	0.2	(Utami, 2022)
δ	0.05	Asumsi
γ	0.06	Utami, 2022
α	0.05	Asumsi

Selanjutnya hasil simulasi numerik yang telah dilakukan ditampilkan pada gambar berikut.



Gambar 1. Hasil Simulasi Numerik Keadaan Tidak Stabil

Dalam kasus ini, nilai awal yang diambil adalah $S(0) = 0.6, V(0) = 0.1, I(0) = 0.1, R(0) = 0.2$. Berdasarkan nilai parameter-parameter menunjukkan bahwa model penyebaran DBD dalam keadaan tidak stabil,

dengan individu yang terinfeksi semakin banyak. Pada gambar 1 menunjukkan dalam kurun waktu $0 \leq t \leq 100$ terlihat jumlah individu *Susceptible* mendominasi dengan jumlah populasi terbesar, namun secara perlahan mengalami penurunan akibat infeksi dan vaksinasi. Juga terjadi peningkatan jumlah individu *Vaccinated* yang signifikan dengan ini menunjukkan bahwa vaksinasi berperan dalam mengurangi jumlah individu yang rentan terhadap infeksi. Kemudian jumlah individu *Infected* mencapai puncaknya pada waktu tertentu, lalu nantinya tetap ada penyakit. Juga jumlah individu *Recovered* meningkat secara bertahap karena penambahan individu yang sembuh dari infeksi.

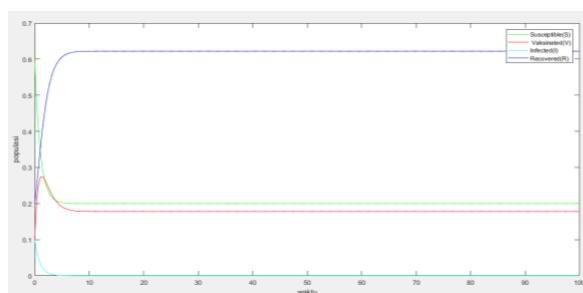
3.5.2 Simulasi pada Sistem Stabil

Selanjutnya akan dilihat dari keadaan stabil dengan nilai parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:

Tabel 4. Nilai Parameter Kondisi Stabil

Simbol	Nilai	Sumber
ρ	0.2	(Utami, 2022)
σ	0.7	(Utami, 2022)
β	0.5	(Utami, 2022)
θ	0.3	(Utami, 2022)
μ	0.2	(Utami, 2022)
δ	0.8	Asumsi
γ	0.06	Utami, 2022
α	0.8	Utami, 2022

Selanjutnya hasil simulasi numerik yang telah dilakukan ditampilkan pada gambar berikut.



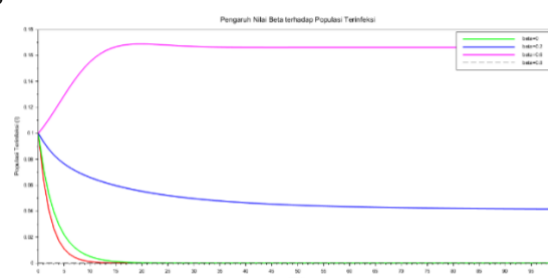
Gambar 2. Hasil Simulasi Numerik Keadaan Stabil

Dalam kasus ini menggunakan nilai awal yang sama tetapi parameter berbeda menunjukkan keadaan stabil. Pada gambar 2 menunjukkan bahwa dalam waktu $0 \leq t \leq 100$ terlihat jumlah individu *Susceptible* memulai dengan jumlah populasi terbesar namun terus menurun seiring waktu karena adanya interaksi dengan vaksinasi dan infeksi. Juga jumlah

individu *Vaccinated* meningkat secara bertahap, menunjukkan keberhasilan vaksinasi dalam mengurangi kerentanan terhadap infeksi. Kemudian jumlah individu *Infected* mengalami penurunan jumlah individu rentan dan penyembuhan. Penurunan ini juga dipengaruhi oleh faktor kematian dan vaksinasi. Di sisi lain, jumlah individu *Recovered* meningkat secara konsisten, mencerminkan proses pemulihan dari infeksi.

3.5.3 Simulasi Pengaruh Parameter Terinfeksi

Simulasi dilakukan untuk melihat pengaruh jumlah individu terinfeksi

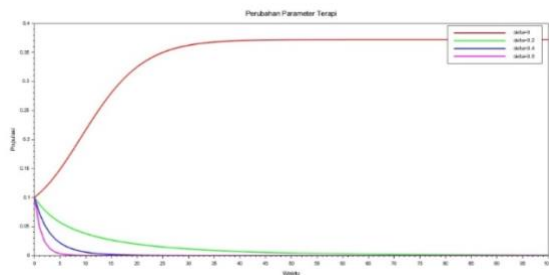


Gambar 3. Hasil Simulasi Parameter Individu Terinfeksi

Grafik tersebut menunjukkan pengaruh nilai β , yaitu laju penularan penyakit, terhadap dinamika populasi terinfeksi dari waktu ke waktu. Terlihat bahwa semakin besar nilai β , semakin tinggi pula jumlah maksimum populasi yang terinfeksi. Pada nilai $\beta = 0.8$ dan $\beta = 0.6$, populasi terinfeksi mencapai puncak yang tinggi dan menetap lebih lama sebelum menurun perlahan. Sebaliknya, pada nilai β yang lebih rendah (0.4 dan 0.2), jumlah populasi terinfeksi lebih rendah dan menurun dengan cepat hingga mendekati nol. Hal ini menunjukkan bahwa semakin kecil nilai β , maka penularan penyakit lebih mudah dikendalikan, sehingga puncak infeksi dapat ditekan dan waktu penyebaran menjadi lebih singkat. Dengan demikian, menurunkan nilai β melalui intervensi seperti terapi dapat menjadi strategi efektif untuk mengendalikan penyebaran penyakit dalam populasi.

3.5.4 Simulasi Pengaruh Parameter Terapi

Simulasi dilakukan untuk melihat pengaruh jumlah individu terinfeksi terhadap terapi.



Gambar 4. Hasil Simulasi Parameter Terapi

Dengan adanya upaya terapi yang dilakukan oleh individu yang terinfeksi, diharapkan penyebaran infeksi dapat dikendalikan atau bahkan dihentikan. Terapi ini dilambangkan dengan simbol δ , yang merepresentasikan tingkat atau efektivitas dari intervensi medis maupun tindakan pencegahan lainnya. Jika δ bernilai 0, berarti tidak ada upaya terapi yang diterapkan, sehingga jumlah individu yang terinfeksi cenderung meningkat karena tidak adanya langkah-langkah pengendalian yang dilakukan. Ketika nilai δ meningkat menjadi 0,4, hal ini menunjukkan bahwa upaya terapi yang diterapkan semakin efektif dalam menekan penyebaran infeksi. Grafik jumlah individu yang terinfeksi mengalami penurunan yang lebih signifikan dibandingkan dengan kondisi sebelumnya, dan bahkan cenderung mendekati angka 0 seiring berjalannya waktu.

Dengan demikian, pengendalian terhadap angka reproduksi dasar (*basic reproduction number*) atau R_0 dapat difokuskan pada upaya menurunkan laju penularan (β) melalui strategi yang terarah dan terintegrasi. Salah satu pendekatan efektif adalah dengan meningkatkan laju terapi (δ), yaitu memastikan bahwa individu yang terinfeksi segera mendapatkan pengobatan yang sesuai. Dalam praktiknya, hal ini dapat diterapkan melalui peningkatan akses terhadap layanan kesehatan, seperti memperluas jangkauan fasilitas pengobatan, menyediakan obat secara gratis atau terjangkau, serta memperkuat sistem pelacakan dan tindak lanjut kasus. Selain itu, edukasi masyarakat tentang pentingnya diagnosis dan kepatuhan terhadap pengobatan juga berperan penting dalam menurunkan β . Upaya ini dapat diperkuat dengan keterlibatan komunitas lokal dan penggunaan teknologi informasi untuk pengingat minum obat.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Model matematika SVIR penyebaran penyakit DBD dengan pengaruh terapi merupakan model yang terbentuk berupa sistem persamaan diferensial nonlinear terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 dan endemik E_e . Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil saat $R_0 < 1$ sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil dalam keadaan yaitu $R_0 > 1$.

Berdasarkan pengamatan *travelling wave* pada model penyebaran penyakit DBD dengan pengaruh terapi, pada titik tetap E_0 memiliki kecepatan minimal $c_{I_1} =$

$$\sqrt{2D_I \left(\frac{R_0 \rho \beta (\mu + \gamma + \delta)}{\beta \rho + \theta N (\mu + \alpha)} + \theta - \mu - \gamma - \delta \right)},$$

sedangkan pada titik tetap endemik E_e memiliki kecepatan minimal $c_{I_2} =$

$$\sqrt{2D_I \left[\kappa + \beta \frac{(-\theta + \mu + \gamma + \delta) \rho}{(\mu + \alpha) [R_0 (\mu + \gamma + \delta) - \theta] N} + \theta - \mu - \gamma - \delta \right]}$$

dengan $R_0 > 1$. Dalam hal ini dengan adanya kecepatan minimal tersebut, maka gelombang penyebaran diwaktu yang akan datang dapat terjadi kembali sedemikian hingga penyebaran penyakit DBD perlu diwaspadai dengan baik.

Berdasarkan hasil perhitungan simulasi kestabilan titik bebas penyakit tidak stabil karena model menunjukkan kearah yang tidak setimbang yaitu tidak mengalami penurunan secara terus menerus sehingga penyebaran penyakit DBD sulit akan berkurang. Kemudian berdasarkan perhitungan simulasi kestabilan titik endemik stabil karena model menunjukkan ke arah setimbang atau laju model mengalami penurunan dan kemudian stabil di satu titik, sehingga penyebaran penyakit DBD akan semakin sedikit dan lama-lama akan menghilang dari populasi.

Dengan melakukan terapi diharapkan dapat membantu individu yang terinfeksi sehingga dapat menekan angka individu yang terinfeksi dan semakin lama akan menurun dan hilang dari populasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Bano, Elinora Naikteas. 2018. "Analisis Kestabilan Titik Tetap Model Matematika Penyebaran Penyakit DBD Tipe SEIR." *Jurnal Saintek Lahan Kering* 1(1): 10–12.

- Juliyah, I., Supriyono. (2016). Analisis kestabilan titik kesetimbangan model matematika proses transmisi virus dengue di dalam tubuh manusia dengan terapi obat herbal. *Journal of Mathematics*, 5(2), 128-134.
- Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. (2022). Data dan informasi profil kesehatan Indonesia 2022. Jakarta: Kemenkes RI.
- Qomarudin, M. H., Metyana, A. C., & Afifah, Y. N. (2020). Analisis Kestabilan dan Travelling Wave pada Model Penyebaran Virus Ebola. *Briliant: Jurnal Riset dan Konseptual*, 5(2), 369-383.
- Rinaldi, B. (2021). *Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Corona Viruses Disease 2019 (COVID-19) pada Kasus Penggunaan Masker Kesehatan* (Doctoral dissertation, matematika).