E-Jurnal Matematika Vol. 15(4), November 2026, pp. 212-217 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2026.v15.i04.p523

HOMOGENITAS SEGILIMA DI GEOMETRI NETRAL

Achmad Faisal Rizky[1§], Luh Putu Ida Harini[2], Kartika Sari[3]

[1]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA-Universitas Udayana [faisal.rizky01@gmail.com]
[2]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA-Universitas Udayana [ballidah@unud.ac.id]
[3]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA-Universitas Udayana [ksarigerard@gmail.com]
[§]*Corresponding Author*

ABSTRACT

Neutral Geometry, a type of Non-Euclidean geometry, is constructed using the first four of Euclid's five postulates without assuming or rejecting the fifth postulate. Neutral geometry necessitates the existence of planar objects that are different from those objects in Euclidean geometry; bi-right quadrilaterals, Khayyam – Saccheri (KS) quadrilaterals, and Haytham – Lambert (HL) quadrilaterals. One unique characteristic of neutral geometry is the homogeneity of neutral plane, which states that the type of summit angles of any KS quadrilateral in that plane is homogeneous. This homogeneity affects the homogeneity of triangles in the neutral geometry. This research aims to study the homogeneity of pentalaterals in neutral geometry. The results are that some type of pentalaterals can be constructed by adding a new point to an existing KS quadrilateral then joined with two segments under certain conditions and that any pentalaterals constructed in that manner is homogeneous.

Keywords: *neutral geometry, planar homogeneity, Haytham–Lambert (HL) quadrilaterals, Khayyam–Saccheri (KS) quadrilaterals, pentalaterals*

1. PENDAHULUAN

Geometri netral adalah geometri yang dibentuk dengan empat postulat pertama Euclid tanpa bergantung pada postulat kelima Euclid atau postulat paralel Euclid (Coxeter, 1989 dan Venema, 2012). dengan kata lain, geometri netral adalah geometri yang tidak mengasumsikan postulat kelima Euclid atau postulat keparalelan Euclid sebagai benar atau salah (Dillon, 2018). Tidak dipertimbangkannya postulat kelima Euclid dalam geometri netral mengakibatkan adanya bangun-bangun planar dengan sifat-sifat berbeda daripada bangun-bangun planar yang ada dalam geometri Euclid. Dibuktikan dengan keberadaan kuadrilateral (segiempat) *bi-right* (Greenberg, 2008 dan Dillon, 2018), kuadrilateral Khayyam-Saccheri (Greenberg, 2008; Venema, 2012; Dillon, 2018 dan Rawuh, 2009) dan kuadrilateral Haytham-Lambert (Greenberg, 2008; Venema, 2012; dan Dillon, 2018) di geometri netral.

Salah satu sifat khas geometri netral adalah homogenitas bidang netral, yaitu sifat yang menyatakan bahwa tipe sudut *summit* suatu kuadrilateral (segiempat) Khayyam-Saccheri dalam suatu bidang di geometri netral menentukan tipe sudut setiap kuadrilateral Khayyam-Saccheri lain di bidang tersebut (Dillon, 2018: 59). Dengan kata lain, tidak ada dua kuadrilateral KS bertipe berbeda di satu bidang netral yang sama. Satu sifat khas lain di geometri netral dijelaskan oleh Teorema Saccheri-Legendre yang menyatakan bahwa jumlah sudut dalam segitiga adalah lebih kecil atau sama dengan $180°$ (Greenberg, 2008; Venema, 2012; Dillon, 2018 dan Rawuh, 2009). Terkait dua sifat tersebut, sayangnya, kajian-kajian terhadap geometri netral masih berfokus pada dua bangun planar, yaitu segiempat dan segitiga; bagaimana dengan bangun yang memiliki sisi lebih banyak?

Penelitian ini berfokus pada homogenitas segilima: (1) mengonstruksi segilima di geometri netral, (2) menunjukkan bahwa segilima-segilima di geometri netral adalah homogen.

2. METODE PENELITIAN

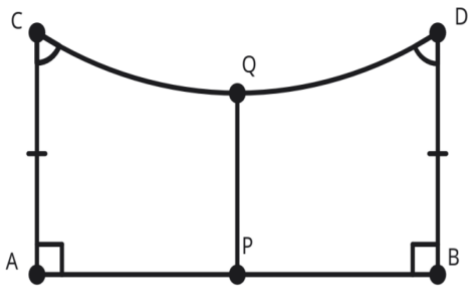
Secara garis besar, langkah penelitian dibagi menjadi dua: mengonstruksi segilima dalam suatu bidang netral, kemudian memeriksa homogenitas segilima dalam bidang netral tersebut:

2.1 Mengonstruksi Segilima

Konstruksi segilima di geometri netral dilakukan dalam langkah-langkah berikut:

1. Memastikan bahwa untuk membentuk bangun planar dengan n sisi, minimal diperlukan n *vertices*. Sebagai akibatnya perlu ada n titik. Segilima yang didapatkan di tahap ini masih berupa segilima general
2. Menambahkan satu titik baru pada kuadrilateral (segiempat) yang ada di geometri netral. Dalam hal ini kuadrilateral Khayyam-Saccheri. Di tahap ini, segilima dikonstruksi secara spesifik di suatu bidang netral
3. Meletakkan satu titik baru dengan aturan peletakkan sedemikian segilima yang dihasilkan konveks

Definsi 2.1 (kuadrilateral Khayyam-Saccheri) (Dillon, 2018 : 55) Kuadrilateral Khayyam-Saccheri (kuadrilateral KS) adalah kuadrilateral siku ganda sama kaki, yaitu, kuadrilateral dengan sisi-sisi yang saling berhadapan dan bersebelahan dengan sudut siku kongruen. Garis tengah (*midline*) dari kuadrilateral KS adalah ruas garis yang menghubungkan titik tengah dari *base* dengan titik tengah dari *summit* (Gambar 2.1)



Gambar 2.1. Kuadrilateral KS dengan ∠ C dan ∠ D dua sudut summit yang tidak harus sudut-sudut siku

2.2 Memeriksa Homogenitas Segilima di Geometri Netral

Homogenitas segilima akan diperiksa dengan menggunakan informasi yang sudah diketahui perihal homogenitas segiempat dan segitiga ditambah dengan Teorema Saccheri-Legendre.

Definisi 2.2 (Dillon, 2018: 58) Tipe suatu sudut adalah lancip, siku, atau tumpul. Tipe suatu kuadrilateral KS adalah tipe sudut-sudut *summit* nya.

Teorema 2.3 (Homogenitas Segiempat) (Dillon, 2018: 62) Semua kuadrilateral KS dalam suatu bidang netral adalah bertipe sama.

Definisi 2.4 (Tipe Bidang Netral) (Dillon, 2018: 63) Tipe dari suatu bidang netral adalah lancip, siku, atau tumpul tergantung pada apakah kuadrilateral KS (di bidang itu) lancip, siku atau tumpul.

Definisi 2.5 (Tipe Segitiga) (Dillon, 2018: 64) Sebuah segitiga adalah bertipe hiperbolik apabila jumlah sudut dalamnya adalah kurang dari π. Bertipe Euclid apabila jumlah sudut dalamnya adalah (sama dengan) π. Bertipe eliptik apabila jumlah sudut dalamnya lebih besar dari π.

Teorema 2.6 (Dillon, 2018: 64)

1) Semua segitiga dalam suatu bidang netral adalah **bertipe sama.**
2) Eksistensi dari satu segitiga bertipe Euclid dalam suatu bidang netral **ekuivalen** dengan eksistensi persegi panjang di bidang itu atau kuadrilateral KS di bidang netral itu memiliki sudut-sudut *summit* siku ($90°$)

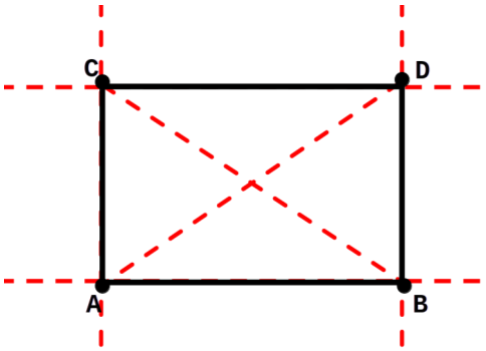
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Terlebih dulu syarat-syarat untuk segilima konveks dijelaskan, kemudian ditambahkan satu titik, selanjutnya menghubungkan satu titik dengan dua ruas garis sedemikian terbentuk segilima konveks.

3.1 Konstruksi Segilima di Bidang Netral

Syarat-syarat agar terbentuk segilima konveks adalah sebagai berikut:

1. Satu titik baru ditambahkan pada suatu kuadrilaeral KS sedemikian tidak ada tiga titik yang kolinear (segaris). Penempatan satu titik baru sedemikian ada tiga titik yang kolinear adalah: titik baru elemen sisi-sisi segiempat, titik baru elemen perpanjangan sisi-sisi segiempat, atau titik baru eleman ruas-ruas diagonal segiempat (Gambar 3.1). Sebagai akibatnya, penempatan titik baru pada kondisi diatas dikecualikan

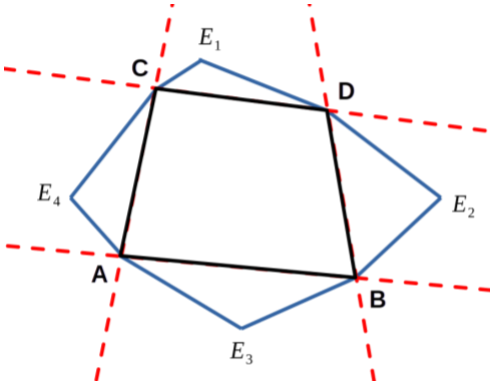


Gambar 3.1 Himpunan-himpunan dimana satu titik baru ditambahkan membentuk tiga titik kolinear (garis putus-putus merah)

2. Segilima konveks didapatkan dengan mengecualikan penempatan titik baru di daerah luar segiempat dengan *edges* berupa dua garis perpanjangan sisi segiempat

Definisi 3.1 (Sub-Himpunan Daerah Luar) Diberikan $\square ABCD$. Diperpanjang garis-garis dari sisi-sisi $\square ABCD$. Dalam hal ini, $\overline{AB}$ menjadi garis AB, $\overline{BD}$ menjadi garis BD, $\overline{CD}$ menjadi garis CD dan $\overline{AC}$ menjadi garis AC. Garis-garis perpanjangan sisi tersebut akan membagi daerah luar $\square ABCD$, $L(\square ABCD)$, menjadi dua jenis sub-himpunan:

i. Daerah luar dengan *edges* berupa satu sisi dari $\square ABCD$ dan dua garis perpanjangan sisi $\square ABCD$.
ii. Daerah luar dengan *edges* berupa dua garis perpanjangan sisi $\square ABCD$. konskuensinya, titik baru ditempatkan pada daerah luar segiempat dengan *edges* berupa satu sisi segiempat dan dua garis perpanjangan segiempat (Gambar 3.2)



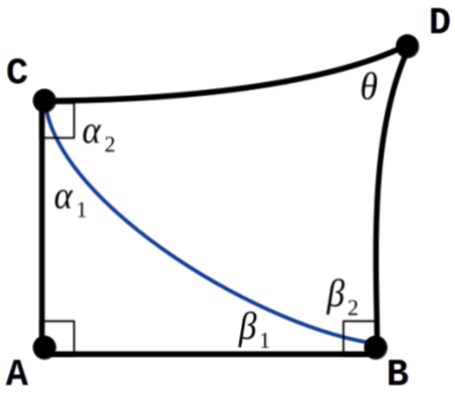
Gambar 3.2 Titik-titik E adalah titik-titik baru yang ditambahkan sedemikian segilima yang terbentuk adalah segilima konveks

3. Jika segiempat (kuadrilateral) yang ditambahkan satu titik adalah kuadrilateral di geometri netral, maka segilima yang dihasilkan dari proses di nomor satu sampai dua adalah segilima (pentalateral) di geometri netral.

3.2 Sistem Segiempat-Diagonal Segiempat

Memastikan bahwa satu titik baru yang ditambahkan pada kuadrilateral di bidang netral, kemudian dihubungkan dengan titik-titik sudut dari kuadrilateral netral dengan ruas-ruas garis sedemikian ruas-ruas garis tersebut memiliki 'kelengkungan' sesuai tipe bidang netral itu. Untuk ini, kehomogenan kuadrilateral dalam bidang netral (Teorema 2.3) berperan.

Definisi 3.2 (Sistem Segiempat-Diagonal Segiempat)
Diberikan segiempat $\square ABCD$. Misalkan $\overline{BC}$ merupakan diagonal segiempat $\square ABCD$, sudut-sudut yang dibentuk oleh diagonal yang membagi sudut kuadrilateral, bersama kuadrilateral $\square ABCD$ membentuk sistem yang dinamakan sistem segiempat – diagonal segiempat (Gambar 3.3)



Gambar 3.3 □ ABCD bertipe lancip memiliki diagonal sedemikian terbentuk dua segitiga bertipe lancip agar sistem konsisten

Definisi 3.3 (Deskripsi Bangun yang Benar)
Deskripsi suatu bangun dari suatu bidang tertentu adalah informasi terkait tipe bidang di mana bangun tersebut berada dan sistem segiempat – diagonal segiempat dari bangun tersebut. Deskripsi bangun yang benar adalah deskripsi bangun sedemikian persamaan /pertaksamaan terkait ukuran sudut, dan jumlah sudut dalam dari sistem segiempat – diagonal segiempat bangun itu membentuk himpunan pernyataan yang konsisten.
Gambar 3.3 memberikan deskripsi segiempat $\square ABCD$ dengan diagonal $\overline{BC}$ sedemikian $\triangle ABC$ dan $\triangle BCD$ memenuhi

$$\begin{aligned} & u\angle BAC + \alpha_1 + \beta_1 < \pi \\ \Leftrightarrow\ & 1/2\,\pi + \alpha_1 + \beta_1 < \pi \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_1 + \beta_1 < 1/2\,\pi \end{aligned} \tag{3.1}$$

dan

$$\begin{aligned} & u\angle BDC + \alpha_2 + \beta_2 < \pi \\ \Leftrightarrow\ & \theta + \alpha_2 + \beta_2 < \pi \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_2 + \beta_2 < \pi - \theta \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_2 + \beta_2 < 1/2\,\pi + \epsilon \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dengan $0 < \theta < ½\,\pi$ dan ϵ merupakan nilai positif yang kecil yang berada di interval $0 < \epsilon \leq \pi$.

Penjumlahan pertaksamaan (3.1) dan (3.2) menghasilkan

$$(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) < \pi + \epsilon \tag{3.3}$$

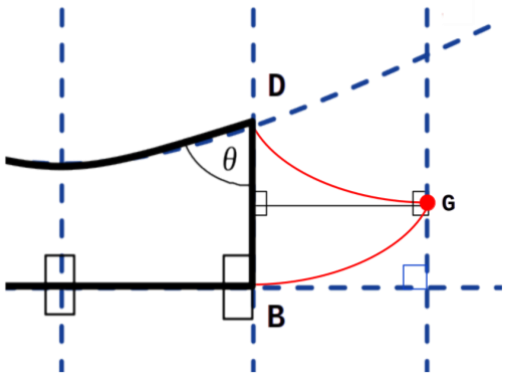
Tetapi, $\alpha_1 + \alpha_2$ dan $\beta_1 + \beta_2$ keduanya sudut siku. Akibatnya, ruas kiri pertaksamaan (3.3) bernilai π yang membuat himpunan pernyataan ini konsisten.

Sebagai ilustrasi dari deskripsi yang salah, misalkan dibuat pengandaian pada suatu sistem segiempat - diagonal segiempat dengan segiempat bertipe siku, tetapi dua segitiga yang dihasilkan diagonal segiempat itu keduanya bertipe hiperbolik, atau keduanya bertipe eliptik. Tujuan akhir dari diketahuinya deskripsi bangun yang benar adalah untuk mengetahui gambaran 'kelengkungan' dari ruas-ruas garis di geometri netral (bandingkan kelengkungan diagonal $\overline{BC}$ di Gambar 3.3 dengan sebarang diagonal segiempat Euclid).

3.3 Jenis-jenis Segilima di Geometri Netral

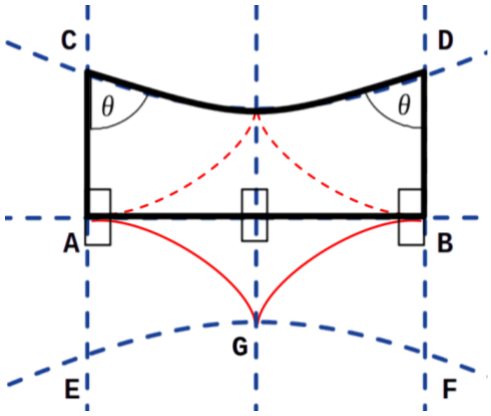
Berdasarkan sistem segiempat-diagonal segiempat dan aturan deskripsi bangun yang benar, penambahan satu titik menghasilkan segilima-segilima berikut

Segilima Bertipe Lancip

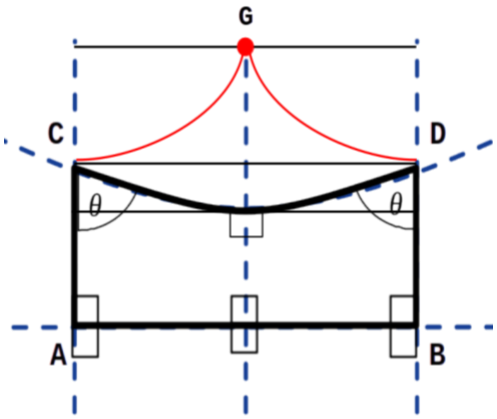


Gambar 3.4 Segilima ABGCD ekstensi segiempat KS lancip □ ABCD dekat sisi samping. △ BGD merupakan segitiga bertipe hiperbolik

E-Jurnal Matematika Vol. 15(4), November 2026, pp. 212-217 ISSN: 2303-1751
DOI: https://doi.org/10.24843/MTK.2026.v15.i04.p523



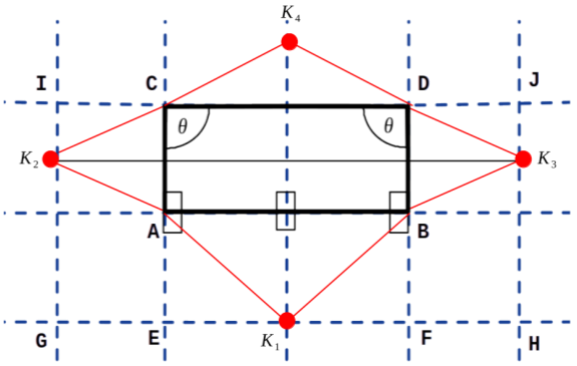
Gambar 3.5 Segilima AGBCD ekstensi segiempat KS lancip □ ABCD dekat base. △ ABG merupakan segitiga bertipe hiperbolik



Gambar 3.6 Segilima ABCDG ekstensi segiempat KS lancip □ ABCD dekat summit. △ CDG merupakan segitiga bertipe hiperbolik

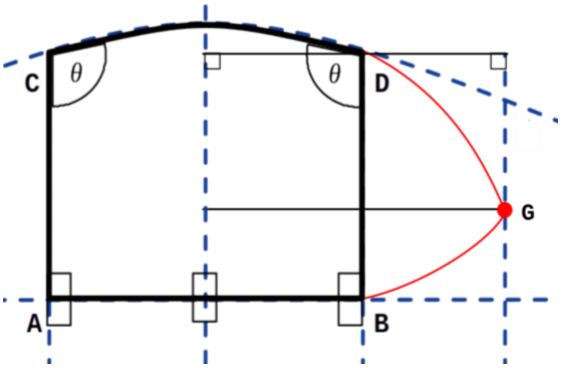
Segilima Bertipe Siku

Bidang netral bertipe Euclid (siku) memiliki visualisasi lebih intuitif. Segiempat KS bidang Euclid adalah persegi panjang (atau persegi) dengan segitiga yang jumlah sudut dalamnya tepat π. Semua kemungkinan segilima yang terbentuk dikumpulkan di Gambar 3.7.

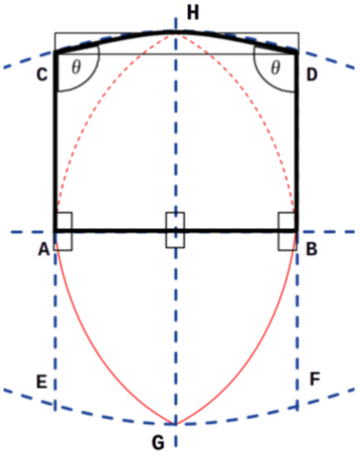


Gambar 3.7 Segilima-segilima yang dihasilkan adalah segilima ABK_3CD, AK_1BCD, ABK_2CD, dan $ABCK_4D$

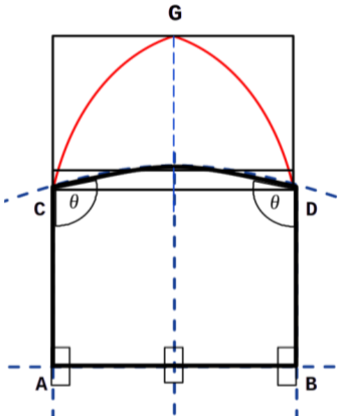
Segilima Bertipe Tumpul



Gambar 3.8 Segilima ABGCD ekstensi segiempat KS tumpul □ ABCD dekat sisi samping. △ BGD merupakan segitiga bertipe eliptik



Gambar 3.9 Segilima AGBCD ekstensi segiempat KS tumpul □ ABCD dekat base. △ ABG merupakan segitiga bertipe eliptik



Gambar 3.10 Segilima ABCDG ekstensi segiempat KS tumpul □ ABCD dekat base. △ CDG merupakan segitiga bertipe eliptik

Gambar 3.4 sampai 3.10 menunjukkan bahwa pada dasarnya prosedur konstruksi segilima (pentalateral) yang dilakukan adalah penggabungan antara satu kuadrilateral Khayyam-Saccheri (KS) dengan satu segitiga baru di suatu bidang. Kemudian 'deskripsi bangun yang benar' dapat dilihat sebagai suatu kriteria yang memastikan bahwa segitiga baru yang ditambahkan memiliki tipe yang sama dengan kuadrilateral KS di bidang itu. Berikut adalah tabel kekonssistensian dari segilima yang didapatkan dari hasil konstruksi segiempat (kuadrilateral KS) di bidang itu.

Tabel 4.1 Konsistensi Tipe Bangun di Bidang Netral

Tipe Segiempat		**Tipe Segitiga**		**Tipe Segilima**
Lancip	➡	Hiperbolik	➡	Lancip
Siku	➡	Euclid	➡	Siku
Tumpul	➡	Eliptik	➡	Tumpul

Dari tabel terlihat bahwa hubungan antara tipe segitiga, segiempat, dan segilima menunjukkan keterkaitan sifat-sifat geometris yang telah dibuktikan proses konstruksinya berdasarkan aksioma dan teorema geometri netral. Lebih lanjut konstruksi dan klasifikasi bangun pada geometri netral harus didasarkan pada pembuktian matematis, bukan semata-mata pada representasi visual.

4. KESIMPULAN

Pertama, segilima dapat dikonstruksi dalam geometri netral malalui penambahan satu titik baru pada suatu kuadrilateral Khayyam-Saccheri di suatu bidang netral. Kemudian, satu titik baru tersebut dihubungkan dengan dua titik sudut bersebelahan dari kuadrilateral KS oleh dua ruas garis. Kedua, segilima yang terbentuk memenuhi kriteria yang dinamakan 'deskripsi bangun yang benar'. Kriteria itu menjamin konsistensi antara tipe kuadrilateral KS dan jumlah sudut dalam sebarang segitiga di geometri netral yang direpresentasikan oleh Teorema Saccheri-Legendre. Konsekuensinya, segilima yang didapatkan dari prosedur konstruksi ini bertipe sama dengan segiempat (kuadrilateral KS) di bidang tersebut. Akibatnya tipe segilima yang dihasilkan selalu sama dengan tipe segiempat KS pada bidang netral tersebut. Karena sifat homogenitas bidang netral serta homogenitas tipe segiempat-segiempat KS maka untuk setiap segilima di bidang netral bersifat homogen.

DAFTAR PUSTAKA

Greenberg, Marvin J. 2008. *Euclidean and Non-Euclidean Geometry.*

Rawuh. 2009. *Geometri*. Universitas Terbuka

Dillon M. 2018. *Geometry through history: euclidean hyperbolic and projective geometries*. Springe https://doi.org/10.1007/978-3-319-74135-2

Coxeter H. S. M.. 1969. *Introduction to geometry* (2nd ed.). Wiley

Venema, Gerard A. 2012. *Foundations of Geometry* (2nd ed.). Pearson.